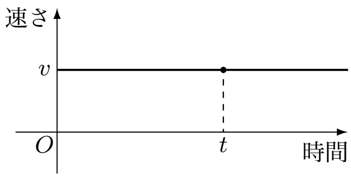
道のりと積分

(道のり) = (速さ) × (時間) は小学校以来親しんできた関係式である。大変実用的な式であるにも関わらず、それが何を計算しているかを深く考えたことはないであろう。いま実用的と言ったのだが、たとえば車や電車に 30 分間乗ったからといって、即座に移動した道のりが分かるわけではない。この公式は、あくまでも一定の速度で進むことが前提となっているので、時々刻々速度が変化する乗り物には適さないのである。

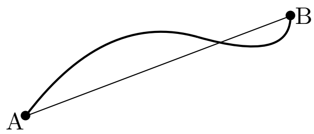
さて、道のりが何を計算しているかは、時間と速さの関係をグラフにしてみるとよく分かる。速さは一定であることが前提なので、それは



のような関係である。このとき、(速さ) × (時間) を計算するということは、長方形の面積を求めているに他ならない。そして、長方形の面積を求めることは積分につながっていたことを思い出してほしい。すなわち、速度の関数を積分したものが道のりなのである。

* * *

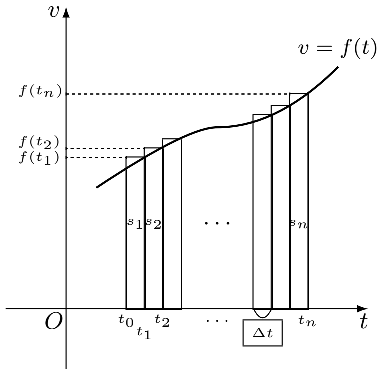
ところで (道のり) = (速さ) × (時間) は、(距離) = (速さ) × (時間) と言うこともある。厳密には “道のり” と “距離” では意味が違っている。



一般に、道のりは移動した道筋の長さであり、距離は直線で測る長さである。しかし、そのようなことはほとんど気にしなくても問題にならないので、今後は大雑把に使うことにする。また、“速さ” と “速度” も厳密には違うであろう。一般に、速さは進行方向を考えないで、速度は方向まで含むことがある。しかし、これもさほど問題になることはないであろうから、今後も大雑把に使っていこう。▌

道のりの計算

徒歩であっても乗り物に乗ってでも、その速度は時間に応じて変化するものである。したがって、速度は時間の関数になっている。道路を走る車の場合は適切な関数を見つけることは難しいかもしれないが、電車であれば適切な関数を見つけやすいだろう。



もし速度 v が時間 t の関数で、それを $v = f(t)$ と表せるなら、時間を細かく区切った上で短時間の長方形の面積を求めれば、それが短時間に進んだ道のりとなる。それらを集めたものが一定の時間に進んだ道のりであるから、時刻 t_0 から時刻 t_n までに、時刻 t_k に応じた速度 $f(t_k)$ で進む道のり s は

$$\boxed{s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t \ = \int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt}$$

で計算できることになる。

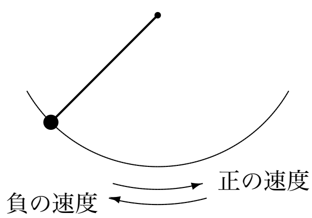
たとえば、時刻 0（秒）から 10（秒）までを $v = 2t$ という関係— t 秒後の速度が秒速 $2t$(m)、つまり 10 秒後は時速 72(km) になる関係—で加速する車で移動したとしよう。すると、車は 10 秒間に

$$s = \int_0^{10} 2t\,dt = [t^2]_0^{10} = 100(\mathrm{m})$$

進む計算になるのである。

変位

車の例では、単純に道のりは速度を積分すれば求められた。それは、車が後戻りすることを想定していないからである。しかし、たとえば振り子のようなものは右へ行ったり左へ行ったりする。



このようなときは、たとえば右に振れているときが正の速度、左に振れているときが負の速度、のように決めて考える必要がある。なぜならば、振り子の速度が関数で表されるとき、速度が常に正であるとしたら、その積分で求められる値は車の移動距離同様、振り子が動いた延べの移動距離になるからである。もちろん、そのような値を知りたいのであればかまわないのだが、振り子の振動を問題にするときは、おそらくある時間における振り子の位置—すなわち**変位**—の方を知りたいはずである。

振り子の例は変位が円周に沿うので、簡単のため直線的な変位を求める具体例に変えてみよう。

限りなく延びた斜面上で、斜面に沿って 5m/s の速度で 1 つのボールを上方へ転がしたとしよう。すると斜面の角度にもよるが、何秒か後にボールは停止し、その後斜面を転がり落ちていくだろう。落ちていくボールがもとの位置を通過するまでの時間は、停止するまでにかかった時間と同じで、そのときの速度は −5m/s である。このことから t 秒後のボールの速度 v は k を定数として

$$v = 5 - kt$$

としてよいだろう。実際、ボールが上方で停止するまでの時間は $0 = 5 - kt$ を解いて $t = \dfrac{5}{k}$ であるから、その 2 倍の時間が経過したときの速度 $\tilde{v}$ は、たしかに

$$\tilde{v} = 5 - k \cdot \frac{10}{k} = -5$$

になっている。

さらに、ボールが停止するまでに移動した距離 s を求めてみると、それは

$$s = \int_0^{\frac{5}{k}} (5 - kt)\,dt = \left[5t - \frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{5}{k}} = \frac{25}{k} - \frac{k}{2} \cdot \frac{25}{k^2} = \frac{25}{2k}$$

である。k が入っているので現実味に欠けるが、かりに $k = 1$ として t 秒後のボールの速度が $(5 - t)$m/s になるとしたら、ボールは 5 秒後に停止し、そこは始めの位置から 12.5m 進んだ地点であることが分かる。

しかし、0 秒から $\dfrac{10}{k}$ 秒までの時間で速度の関数を積分すると

$$\int_0^{\frac{10}{k}} (5 - kt)\,dt = \left[5t - \frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{10}{k}} = \frac{50}{k} - \frac{k}{2} \cdot \frac{100}{k^2} = 0$$

となって、たしかに道のりではなく変位が求められているのである。

＊　＊　＊

物理における物体の運動方程式においては、初速度 v_0 で投げ上げられた物体の t 秒後の速度 v は

$$v = v_0 - gt \quad (g \text{ は重力加速度：約 } 9.80\mathrm{m/s^2})$$

で与えられる。また、t 秒後の位置 h は

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

である。これは中学・高校で習う物理では公式扱いかもしれないが、先ほど見た通り、積分の立場から導かれるものなのである。

一般に、物理で目にする公式や方程式は、微分や積分をした結果得られたものが多い。本来なら公式を証明したり、方程式を導いたりすべきところを、実用性を優先させて公式だけを示しているのだろう。微積分に自信がついたら、それらの公式や方程式を導くものもよいだろう。∎