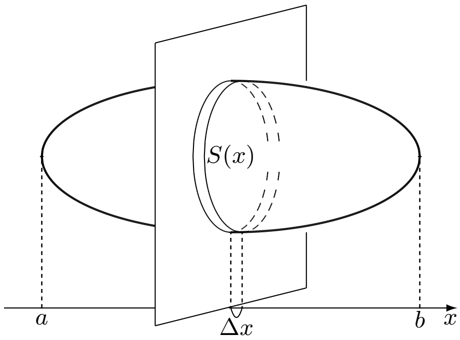
# 立体の体積

図形の面積の計算をするために積分を用いてきたのだが、積分は立体の体積を計算するのにも役立つ。図形の面積では、関数の $y$ の値を長方形の高さに見立て、横幅 $\Delta x$ の長方形で図形を近似したことを思い出そう。その結果、細長い長方形の総和が図形の面積になるのであった。立体の体積でも同じことを考えればよい。




もし立体の切り口を、切り口の位置 $x$ による関数の値で求めることができるなら、それを底面に見立て、高さ $\Delta x$ の薄い立体で近似できるはずである。図の切り口は薄い円柱であるが、切り口の形は柱体であれば何であってもかまわない。すると、立体の体積 $V$ は

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(x)\Delta x$$

のようになるだろう。$S(x)\Delta x$ が細切れにされた柱体の体積である。このとき、たとえば $k=1$ の切り口が $x_1$ の位置—これは $x=a$ の次の位置—に、$k=n$ の切り口が $x=b$ の位置にあれば、立体の体積 $V$ は積分の値として

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

によって計算できることになる。

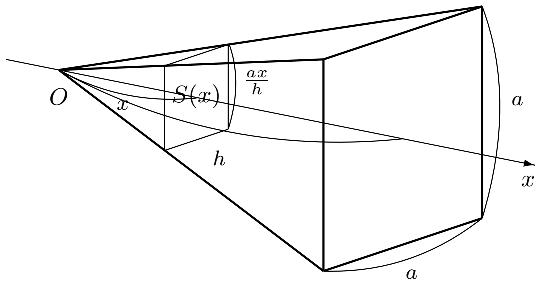
# 錐体の体積

立体の体積を計算するにあたって、具体的に、底面の一辺の長さが $a$、高さが $h$ の四角錐（しかくすい）の体積を計算してみよう。積分計算の都合上、四角錐の尖った頂点を原点 $O$ に置き、底面の中心を $x$ 軸が通るように寝かせることにする。このとき、頂点から $x$ だけ進んだ位置の切り

口を考えると、相似の関係より

$$(\text{切り口の一辺}) : a = x : h$$

であるから、(切り口の一辺) $= \dfrac{ax}{h}$ であることが分かる。




したがって、底面の面積を $x$ の関数として表すと $S(x) = \left(\dfrac{ax}{h}\right)^2$ であるから、この場合の四角錐の体積 $V$ は

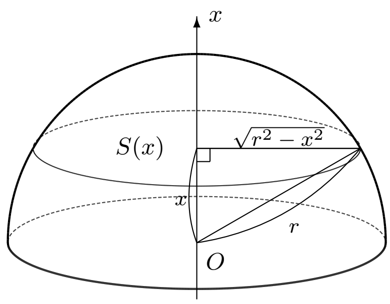
$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx \\ &= \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{a^2h}{3} \end{aligned}$$

となる。

たしかに錐体の体積を求める公式通りであるが、底面積と高さに $\dfrac{1}{3}$ を掛けることは、積分計算をして初めて正確に分かるのである。

## 球の体積

中学校や高校で錐体の体積について学ぶと、$\dfrac{1}{3}$ が掛けられていることを不思議に思うものだが、球の体積では $\dfrac{4}{3}$ が掛けられていることはさらに不思議かもしれない。



さて、球の体積を求めるのだが、計算の都合で半径 $r$ の半球の体積を求めることにする。球の中心から外へ向かって、距離 $x$ の位置における切り口は円である。その円の半径は、三平方の定理より $\sqrt{r^2-x^2}$ であるから、面積関数 $S(x)$ は

$$S(x) \;=\; \pi(\sqrt{r^2-x^2}\,)^2 \;=\; \pi(r^2-x^2)$$

である。

したがって、半球の体積 $V/2$ が

$$V/2 \;=\; \int_0^r \pi(r^2-x^2)\,dx \;=\; \pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r \;=\; \frac{2r^3}{3}\pi$$

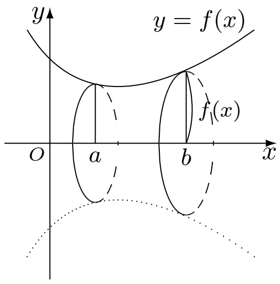
であるから、半径 $r$ の球の体積 $V$ は、その 2 倍の

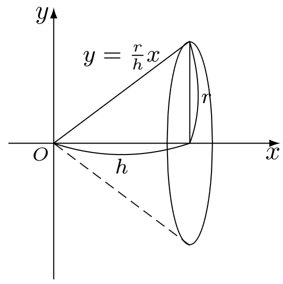
$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi r^3}$$

になるのである。

## 回転体の体積

球の体積は異なる半径の円盤を積み上げるような方法で計算した。このことから分かるように、積分に必要な面積関数は、$x$ 軸の周りに回転させた円の面積が計算できる関数であればよい。したがって、回転体の体積を求めるには切り口の円の半径を知る必要があるのだが、円の半径とは立体の輪郭が $x$ 軸からどの程度離れているかを示す値なので、結局、立体の輪郭を表す関数 $f(x)$ さえ分かれば回転体の体積が求められるということである。




たとえば $y=f(x)$ を立体の輪郭とする回転体があったとしよう。すると、その切り口は半径 $f(x)$ の円なので、切り口の面積関数は $\pi\{f(x)\}^2$ である。したがって、回転体が $x$ 軸の区間 $[a,\ b]$ にあれば、体積 $V$ は

$$\boxed{V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx}$$

で求めることができる。

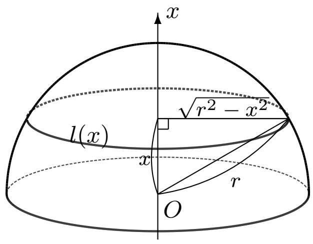
すると、底面の半径が $r$、高さが $h$ の円錐の体積は、円錐を $x$ 軸上に寝かせて考えると、輪郭の関数は原点を通る傾き $\dfrac{r}{h}$ の直線であるから、体積 $V$ は

$$V \;=\; \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2\,dx \;=\; \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h \;=\; \frac{\pi r^2 h}{3}$$

と計算できるのである。

*　*　*

角錐、半球、回転体、いずれの立体の体積の計算においても、切り口の面積を表す関数 $S(x)$ もしくは $\pi\{f(x)\}^2$ を積分して求めたのであった。このことだけを注視してしまうと、体積の計算は、まるで厚みのない平面を一定の区間で積分すれば求められるような錯覚に陥ってしまうものである。




この錯覚に陥ると、今度は球の表面積を求めるときに、幅のない円周を $x$ の区間 $[0,\ r]$ で積分すれば半球の表面積になるように思えてしまうものである。球の中心から外へ向かって、距離 $x$ の位置における切り口の円周の長さ $l(x)$ を表す関数は $2\pi\sqrt{r^2-x^2}$ である。したがって表面積 $S$ は

$$S = \int_0^r 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

で求めらると考えてしまうだろう。この積分には三角関数の積分が使われるので、いま計算を示すことはできない。しかしこのまま計算を続けると $S = \dfrac{\pi^2 r^2}{2}$ となる。明らかに球の表面積を求める公式 $S = 4\pi r^2$ とは違う。

立体の体積に関する積分計算は平面を積分しているのではない。あくまでも底面積が $S(x)$ で高さが $\Delta x$ の**厚みがある立体**を積み重ねているのである。同時に、立体の表面積に関する積分計算も線を積分しているのではない。あくまでも線の長さが $l(x)$ で高さが $\Delta x$ の**幅がある平面**を寄せ集めるのである。実際の計算は、三角関数の積分が登場するときに示すことにしよう。▮