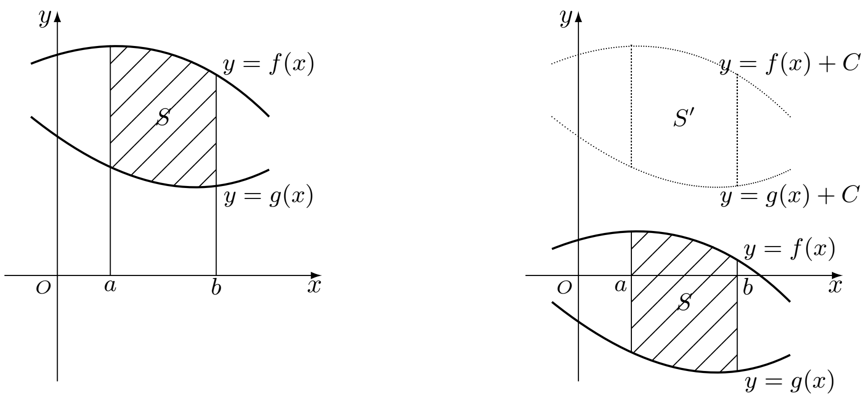
2曲線間の図形の面積

2 つの曲線が与えられると、曲線で図形が形作られたり、曲線間に隙間ができたりするだろう。そのようにしてできた図形や隙間は広さを持っているので、面積の計算ができる。その方法を考えることにしよう。



左図は、関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ に挟まれた部分のうち、区間 $[a,\ b]$ における面積 S を求めることを想定したものである。積分計算で求められる値は、関数と x 軸に挟まれた部分の面積であるから、この場合 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

であり、定積分の性質から

$$\boxed{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx}$$

としてよいことになる。つまり、上側の関数から下側の関数を引いた上で積分した値が、2 つの関数に挟まれた部分の面積である。

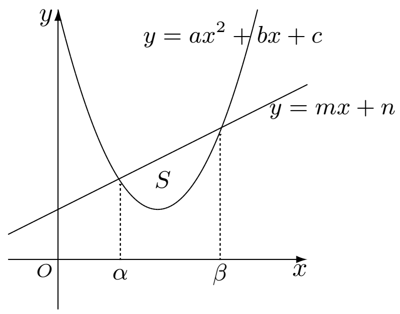
このことは、関数が必ずしも y 軸の正の部分になくても成り立つ。なぜならば、たとえば右図のような状況にある場合、2 つの関数が x 軸より上になるように平行移動した関数を考えるとよい。図形の面積ということにおいては、いずれも同じことであるから、

$$\begin{aligned} S = S' &= \int_a^b [\{f(x) + C\} - \{g(x) + C\}]\,dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \end{aligned}$$

となって、たしかに上側の関数から下側の関数を引いた上で、積分した値と一致している。

具体的な面積計算

具体的に、2 つの曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と $y = mx + n$ で囲まれた図形の面積を求めてみよう。もっとも、2 つの関数に与える係数によっては、囲まれる部分がないことがあるので、ここでは囲まれることを前提としておく。また、図を描く都合もあるので、$a > 0$ で考えることにしよう。



さて、放物線と直線が 2 点で交わっているところは、方程式

$$ax^2 + bx + c = mx + n \quad (※)$$

を解けば分かるのであるが、ここではそれは $x = \alpha, \beta$ であるとしよう。すると、求めたい図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{(mx+n) - (ax^2 + bx + c)\}\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{-ax^2 + (m-b)x + (n-c)\}\,dx \end{aligned}$$

である。この式をそのまま積分してもよいのだが、積分対象になっている式は※の方程式を右辺に集めた式であることに注意しよう。また、※の解が $x = \alpha, \beta$ であることも考慮すると

$$-ax^2 + (m-b)x + (n-c) = -a(x-\alpha)(x-\beta)$$

である。したがって、面積の計算は

$$S = \int_\alpha^\beta \{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx$$

ということになる。この式は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} S &= -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -a\int_\alpha^\beta \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}\,dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -a\left[\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2}x^2 + \alpha\beta x\right]_\alpha^\beta \\
&= -a\left\{\frac{\beta^3-\alpha^3}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2) + \alpha\beta(\beta-\alpha)\right\} \\
&= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)\{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) - 3(\alpha+\beta)^2 + 6\alpha\beta\} \\
&= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)\{-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2\} \\
&= \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\ .
\end{aligned}
$$

したがって、放物線と直線によって囲まれる図形の面積は、放物線の a の値と交点の座標だけから計算できることが分かるのである。

* * *

この結果は、学校などで習う積分公式

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \text{ の解が } x=\alpha,\, \beta \text{ のとき、} \int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

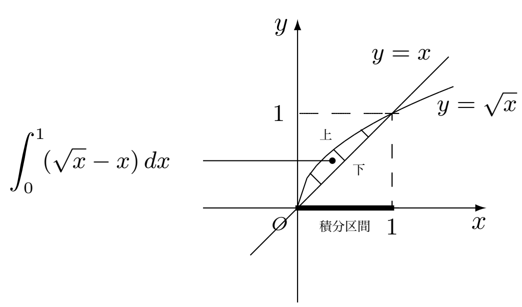
とは違うことに注意してほしい。なぜなら、公式は単に計算結果を示したに過ぎないからである。しかし、公式を図形の面積に重ねて考えれば、それは放物線が x 軸と囲む図形のことである。このことは、面積の計算には b、c の値が不要である—すなわち放物線の形を知る必要がない—ことを意味する。信じがたいことであるが、これにはからくりがある。解と係数の関係から $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ なので、実際は α と β を用いて計算することは、b や c の値を用いて計算していることと同じなのである。▮

面積計算の工夫

関数 $y=\sqrt{x}$ はとりわけ難しい関数ということはない。それは

x	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\cdots$

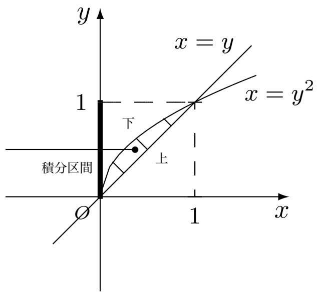
のような表を参考に大まかなグラフを描くことができるからである。



そこで、$y=\sqrt{x}$ のグラフに $y=x$ も描き加えると、2 つのグラフで囲まれる部分ができ、面積の計算もできるだろう。それは当然 $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x}-x)\,dx$ で求めるのだが、では、$\sqrt{x}$ を積分したものは何だろう。もちろん $\sqrt{x}$ は積分でき、公式集を見ればすぐに分かることである。しかし、いまの私たちの立場では、n を正の整数とした x^n の積分しか扱えないのである。

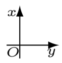
そこで、少し視点を変えて計算することにしよう。

$$\int_0^1 (y-y^2)\,dy$$



まず関数 $y=\sqrt{x}$ や $y=x$ は、x を定義域とする値域 y の関数であるが、これを y を定義域とする値域 x の関数として見直すと、それぞれ

$$x=y^2、\quad x=y$$

となる。これは、本来なら  のような座標軸にグラフを描くべきであるから、通常の感覚でグラフを眺めたければ、首を 90° 傾ける必要がある。ただ、いずれにしても x 軸の正の方向が “上側” になっていることに注意しよう。

すると、斜線の部分の面積を計算するには、図形の上側に当たる関数 $x=y$ から下側に当たる関数 $x=y^2$ を引いて、定義域である変数 y で積分すればよい。よって、斜線の面積は

$$\int_0^1 (y-y^2)\,dy = \left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

であることが分かるのである。

*　　*　　*

このように視点を変えて積分をしても正しく面積の計算ができることを考えれば、積分はかなりしっかりした理論であると感じるだろう。いま取り組んでいる、区間上の関数の積分は**リーマン積分**と呼ばれる[1]。しかし区間を定めて積分する場合、関数に不連続な点があるとうまく積分できないことがある。また、級数関数などにもリーマン積分は不向きなようである。私たちが扱う関数は簡単なものが多いので、リーマン積分は十分に機能する大変便利な理論であるが、それでは困る世界もあるのである。そのような要求に応える積分は**ルベーグ積分**と呼ばれる[2]。ルベーグ積分は、言わば、リーマン積分の拡張版のようなもので、より広範囲の関数が積分できるのである。ただし、その分敷居は高いのだが。

[1]ベルンハルト・リーマン（1826–1866）：ドイツの数学者。
[2]アンリ・ルベーグ（1875–1941）：フランスの数学者。

たとえば

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x\text{ が有理数のとき}) \\ 0 & (x\text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

という関数は、区間を有理数で区切った場合と無理数で区切った場合では、積分の値が異なるのでリーマン積分可能とは言えない。しかし、ルベーグ積分なら可能なのである。

もちろん、ここで詳細を述べることはできないが、数学は様々な不備を解消するために、進化した理論が発見されるものなのである。∎