定積分

関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)+C$ で表すことにすると

$$[F(x)+C]_{x=b}-[F(x)+C]_{x=a}=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

となって、積分定数 C に無関係の一定値になることが分かる。説明が前後するが、$[F(x)+C]_{x=b}$ は $F(x)+C$ に $x=b$ を代入する、という意味である。この計算を、関数 $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表すことにする。すなわち $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ であるが、とくに $[F(x)+C]_{x=b}-[F(x)+C]_{x=a}$ を簡単に $[F(x)]_a^b$ と書くことにすると

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)}$$

という表現になる。

定積分の性質

定積分には不定積分と同様の性質が成り立つ。すなわち

$$\boxed{\begin{gathered}k\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b kf(x)\,dx\\ \int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}\,dx\end{gathered}}$$

である。これらは定積分の定義から

$$\begin{aligned}k\int_a^b f(x)\,dx &= k\{F(b)-F(a)\}\\ &= kF(b)-kF(a)\\ &= [kF(x)]_a^b\\ &= \int_a^b kf(x)\,dx\ ,\\ \int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx &= \{F(b)-F(a)\}\pm\{G(b)-G(a)\}\\ &= \{F(b)\pm G(b)\}-\{F(a)\pm G(a)\}\\ &= [F(x)\pm G(x)]_a^b\\ &= \int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}\,dx\end{aligned}$$

であることが確認できる。

定積分には他にもいろいろな性質があり、それらも定義から導くことができる。はじめに

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

と計算できることから

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

がいえる。また

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\{F(a) - F(b)\} = -\int_b^a f(x)\,dx$$

のような計算が成り立つので

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

がいえる。さらに、少し妙な計算をしているように見えるが

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} \\ &= F(b) - F(a) \ = \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

であるから

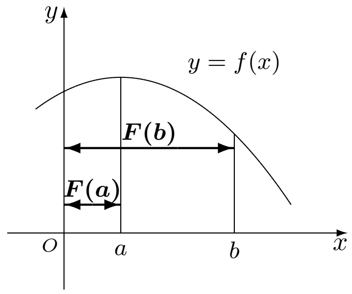
$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

となっていることが分かる。

定積分と面積

定積分が面積の計算から始まったことを思えば、これまでに登場した関係式は、ほぼ納得できるものであろう。“ほぼ” というのは、定積分の計算結果が必ずしも通常の図形の面積と一致しないことがあるからだ。たとえば通常の面積の計算なら、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ — a から b までの図形の面積—を計算しようが、$\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ — b から a までの図形の面積—を計算しようが、同じ値でなければならないだろう。

しかし、よく考えなければならないのは、定積分が求める値は面積であることに違いはなくとも、$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ で計算される値は原点—すなわち y 軸を縁とする位置—からの図形の面積 $F(a)$、$F(b)$ だということである。

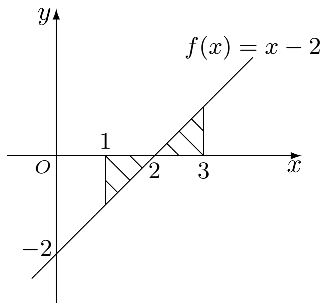


つまり $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の計算は、直接 a から b までの範囲の図形の面積を求めるものではなく、2 つの図形の面積の差である。当然、小さい値から大きい値を引けば負の値になるので、

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

は自然な関係式である。そのため、a、b の大小関係が分からない場合、通常の意味での面積を計算するなら $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ としておく必要がある。

また、$f(x)$ が x 軸の下にあるようなとき、つまり $f(x)$ の値が常に負になっているときは、定積分の求め方から、その値は負の値になることは前に述べた。



具体的に $f(x) = x - 2$ を例に計算をすると、たとえば

$$\int_1^2 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = -2 - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

であり、また

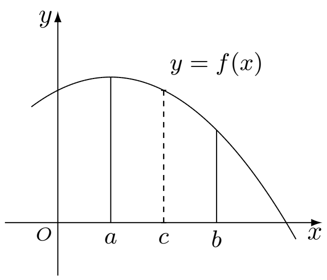
$$\int_1^3 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^3 = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

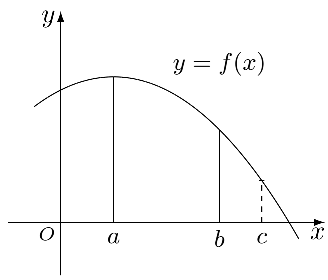
である。2 番目の結果は、x 軸の上と下でちょうど面積が相殺（そうさい）されたことになる。したがって、このような場合に通常の面積を求めるなら

$$\int_1^3 |x-2|\,dx \quad = \quad \int_1^2 \{-(x-2)\}\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 \\
&= \left(2-\frac{3}{2}\right)+\left\{-\frac{3}{2}-(-2)\right\} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

としなくてはならない。





また、図形の面積という観点では

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \quad (※)$$

は自然な関係であることは、左図を見れば分かることかもしれない。しかし、これは a, b, c の大小に関わらず成り立つ関係なのである。

それは面積という観点から分かる。※は定積分の性質から直ちに

$$\int_a^c f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

とすることができるのだが、左辺は (区間 $[a,\ c]$ の面積) − (区間 $[b,\ c]$ の面積) なので、たしかに右辺の (区間 $[a,\ b]$ の面積) に等しくなっている。

* * *

いま実際に定積分の計算を行ったところだが、定積分の計算は効率的に行うのがよい。たとえば $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x^2-1)\,dx$ を計算するには、$[F(x)]_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$ であることから

$$\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_\alpha^\beta=\left(\frac{\beta^3}{3}-\beta\right)-\left(\frac{\alpha^3}{3}-\alpha\right)$$

とするであろう。しかし $\displaystyle\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ に従えば、

$$\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_\alpha^\beta=\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta-[x]_\alpha^\beta=\left(\frac{\beta^3}{3}-\frac{\alpha^3}{3}\right)-(\beta-\alpha)$$

となるであろう。

どちらが計算に有利かは、α、β の値によるので何とも言えない。もちろん状況に応じて、臨機応変に対応するべきことである。▮