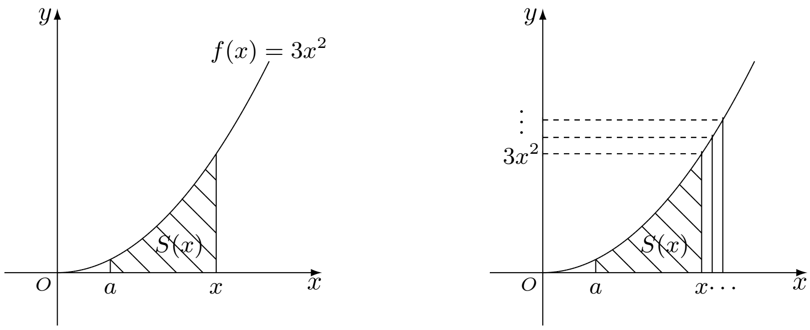
不定積分

面積関数 $S(x)$ を微分すると、面積の輪郭にあたる関数 $f(x)$ —"輪郭関数" と呼ぼう—になることが分かった。たとえば図形の形はともかく、面積が $S(x)=x^3$ で表される関数であったとすると、輪郭関数は $S'(x)=f(x)=3x^2$ ということである。



輪郭というと閉じた線を連想させるが、輪郭が $3x^2$ というのは右端の縁の長さが $3x^2$ ということである。私たちは関数の変化を目で追うとき、左から右へ向かって見ることが多いだろう。$S(x)$ も関数であるから、同じように変化を左から右へ向かわせれば、図形が右の方へ拡張される様子が見られるに違いない。

いま面積関数を $S(x)=x^3$ として話を進めてきたが、図形の面積は $x=a$ から右の部分を指している。このことから $x=a$ のときは、図形の形はただの線であると考えてよいだろう。すなわち面積は 0 である。これは $S(a)=0$ を意味するのであるが、もし $S(x)=x^3$ であれば $S(a)=a^3$ となって 0 になっていない。しがって、ここで考えている面積関数は

$$S(x)=x^3-a^3$$

としなければ都合が悪いことになる。これなら $S(a)=a^3-a^3=0$ となって、つじつまが合う。

なぜ、そのような不都合が生じたのだろうか。それは、定数項は微分すると 0 になるからである。つまり、始めに考えた面積関数 $S(x)$ が、$S(x)=x^3$ であっても $S(x)=x^3-a^3$ であっても、その場合の輪郭関数 $S'(x)=f(x)$ は皆 $3x^2$ になるのである。

このことは、輪郭関数を見ただけでは、目的としている面積関数を求められないことを意味する。つまり、図形の面積を輪郭関数から類推する場合、そこにはどうしても定数分だけの揺らぎが入り込むのである。なぜなら、これまでに議論してきた面積関数は、図形の輪郭の右端だけの変化に注目し、輪郭の左端はとくに指定せずにいた。そのため、輪郭の左端の位置によって図形の面積に違いが生じてしまう。これが、定数分の揺らぎになっているのである。

そうは言っても、輪郭関数から類推される関数が面積関数になることに違いはなく、定数分の揺らぎを無視すれば

$$\boxed{\text{輪郭関数 } f(x) \text{ から、定数分の揺らぎを含む面積関数 } S(x) \text{ を類推できる}}$$

と言ってよいのである。このとき、関数 $f(x) \to S(x)$ の対応を**不定積分**と呼び、記号 $\displaystyle\int$ —インテグラルと読む—を用いて

$$\boxed{\int f(x)\,dx = S(x) + C}$$

と書くことにする。C は**積分定数**と呼ばれ、揺らぎに当たる値である。

いま積分の定義を面積から定めてみたが、実際のところは微分された関数のもとの関数を意味している。このことから $\{F(x)+C\}' = f(x)$ のとき、$F(x)+C$ を $f(x)$ の**原始関数**と言うことがある。しかし、具体的には

$$(x)' = 1, \qquad (x^2)' = 2x, \qquad (x^3)' = 3x^2, \qquad \ldots, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

が分かっているので、これらを見直した式

$$1 = (x)', \qquad x = \frac{1}{2}(x^2)', \qquad x^2 = \frac{1}{3}(x^3)', \qquad \ldots, \qquad x^{n-1} = \frac{1}{n}(x^n)'$$

より、一般に x^{n-1} の積分は $\displaystyle\int x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}x^n + C$ であると言えるが、ふつうは積分される関数を主に据えて、$n := n+1$ として

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

の形で表すことにする。この式は $x^0 = 1$ であることに注意すると、$n = 0$ に対しても成り立っていることが分かる。

* * *

微分を表す記号には様々なものがあり、そのうちの 1 つは $'$（プライム）を用いて $f'(x)$ で表すものである。それに対して積分の記号は、$\displaystyle\int$ と dx を組み合わせて $\displaystyle\int f(x)\,dx$ のように記述するのが基本である。なぜ、もっと単純な記号—たとえば $\displaystyle\int$ だけ—で済ませなかったのだろうか。

それには、はっきりとした理由がある。積分の考えのもとになっている面積の計算は、分割された長方形の横の長さを Δx として、$f(x_k)\Delta x$ を計算することが基本であった。そして長方形の総和を求め、その極限を求めることが、すなわち積分である。つまり、積分の記述は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \Rightarrow \qquad \int f(x)\,dx$$

のような変遷をたどったと見れば、まったく自然な記号なのである。

また、このような事情から、変数 x をたとえば t にすれば、分割された長方形の面積は $f(t_k)\Delta t$ であるから、記号の使い方は $\displaystyle\int f(t)\,dt$ となるだろう。ところで関数 $f(x)=1$ と $f(t)=1$ を考えたとき、それらの原始関数は $F(x)=x+C$、$F(t)=t+C$ である。この表現を積分記号で示せば

$$\int 1\,dx = x+C、\quad \int 1\,dt = t+C$$

であるから、dx, dt の重要性が分かるだろう。蛇足ながら数学には 1 を省略する習慣があるので、$\displaystyle\int dx = x+C$ と書くことを注意しておこう。▮

不定積分の性質

さて、これまでに分かったことは何だろうか。それは

$$S(x) \xrightarrow{\text{微分}} f(x)、\quad f(x) \xrightarrow{\text{積分}} S(x)$$

ということである。このことは、積分定数分の違いはあるものの、微分と積分は互いに逆の演算になっていることを意味している。

積分と微分が互いに逆の演算であるということは、ある関数を「A: 積分してから微分すると元の関数になる」、または「B: 微分してから積分すると元の関数になる」ことでもある。これは

$$\mathrm{A}: \left\{\int f(x)\,dx\right\}' = f(x), \qquad \mathrm{B}: \int \{f(x)\}'\,dx = f(x)$$

であることを言っているのだが、式にするとことばでは見えないものが見えてしまう。それは、A は問題ないが B は問題あり、ということである。

これは具体的な関数を例に出すと分かりやすい。$f(x)=x+1$ とすると、A は

$$\left\{\int (x+1)\,dx\right\}' = \left\{\frac{x^2}{2}+x+C\right\}' = x+1$$

であり、B は

$$\int (x+1)'\,dx = \int 1\,dx = x+C$$

である。先に積分をすると値不明の定数 C が現れるが、定数は微分すれば 0 になるので問題はない。しかし、後で積分をすると積分定数 C が残り、これが元の関数の定数項と同じ値である保証はないのである。

そこで不定積分の性質を調べるために、まず定数項を持たない関数 $h(x)$ を考える。$h(x)$ は定数項を持たないので、

$$\int \{h(x)\}'\,dx = h(x)$$

は正しい。なぜなら、$h(x)$ には定数項がないのだから、$\displaystyle\int \{h(x)\}'\,dx = h(x) + C$ であったとしても、$C = 0$ が特定できるからである。

さて、微分の性質に

$$\{kh(x)\}' = kh'(x)$$

というものがあった。この両辺を積分することにすると、左辺は $\displaystyle\int \{kh(x)\}'\,dx = kh(x)$、右辺は $\displaystyle\int kh'(x)\,dx$ であるから

$$kh(x) = \int kh'(x)\,dx$$

がいえる。ここで $h'(x) = f(x)$ とおくと、$h(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ であるから、結局

$$\boxed{k\int f(x)\,dx = \int kf(x)\,dx \qquad (☆)}$$

が成り立つことになる。

もうひとつ、微分の性質に

$$\{h(x) + k(x)\}' = h'(x) + k'(x)$$

というものがあった。$h(x)$ と $k(x)$ はともに定数項を持たない関数である。この両辺を積分することにすると、さっきと同様に

$$h(x) + k(x) = \int \{h'(x) + k'(x)\}\,dx$$

がいえて、ここで $h'(x) = f(x)$、$k'(x) = g(x)$ とおくと、それぞれ $h(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$、$k(x) = \displaystyle\int g(x)\,dx$ であるから、結局

$$\boxed{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int \{f(x) + g(x)\}\,dx \qquad (★)}$$

が成り立つことになる。これは $+$ を $-$ に変えても成り立つことである。

さて、ここまで $h(x)$、$k(x)$ は定数項を持たない関数であると仮定したが、☆と★で記述している $f(x)$、$g(x)$ は $h'(x)$、$k'(x)$ を置き換えたものである。すると、この場合 $f(x)$、$g(x)$ は、定数項を持つ一般の関数を含むことになる。なぜなら、$h(x)$、$k(x)$ が定数項を持たなくとも、x の項があ

れば$h'(x)$、$k'(x)$ は定数項を含むからである。そう考えると、やはり☆と★は、一般の関数についても成り立つ関係と考えてよいのである。

*　*　*

不定積分の性質を調べるのに、定数項を持たない関数だけを考えるのは、やや統一を欠くように思える。しかし、たとえば $F'(x)=f(x)$ となる原始関数 $F(x)$ があるとき、微分の性質から

$$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$$

が成り立っている。これは、$kF(x)$ は微分すると $kf(x)$ になることを意味するので、$kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数の 1 つである。このことは積分定数 C を用いて

$$\int kf(x)\,dx=kF(x)+C$$

と書くことが積分の定義であった。そして、$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx+C$ であるから、

$$\int kf(x)\,dx=kF(x)+C=k\left\{\int f(x)\,dx+C\right\}+C=k\int f(x)\,dx+C$$

と書けば問題ないのである。ちなみに、$kC+C$ は改めて C で書き直している。

☆や★で示された等式は、定数項だけに違いがある**関数の集合**についての等式ととらえるのがよいであろう。そう考えれば

$$\begin{aligned}\int(3x+2)\,dx &= 3\int x\,dx+\int 2\,dx\\ &= \frac{3}{2}x^2+2x+C\end{aligned}$$

のように書いても、1 行めに不備があることにはならない。なぜなら、1 行めは定数項に違いがある関数の集合について等しく、2 行めはその定数項を明確に記述した正しい式と解釈できるからである。▮