

◆不可思議な等式-4-◆

不可思議な解釈

と関数にまつわる関係式の一端を見たところで、今回の話題の芯となった式

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

を再び評価してみましょう。はじめに示したように、これは

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \text{ より } S = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + (1 - 1) + \dots \\ &= 5 \end{aligned} \tag{4}$$

など、どんな値にでもなりました。しかし実際は、(3) とするのがもっともらしいことが分かったのです。すると今度は、他の値がもっともらしくないことを示さないわけにはいきません。今回の話題の締めくくりとして、真相を解明してみようと思います。

妥当な解釈

まず、以前に触れたように

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

は、単なる数値の無限和ではなく、 x の無限級数

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots$$

に、 $x = 1$ を代入したものと考えることにします。

すると (1) で行ったことは

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots = (x - x^2) + (x^3 - x^4) + (x^5 - x^6) + \dots$$

ということです。これは、次のように見るのが妥当でしょう。

$$\begin{aligned} x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots &= (x - x^2) + (x^3 - x^4) + (x^5 - x^6) + \dots \\ &= x(1 - x) + x^3(1 - x) + x^5(1 - x) + \dots \\ &= (1 - x)(x + x^3 + x^5 + \dots) \\ &= (1 - x) \cdot \frac{x}{1 - x^2} \\ &= \frac{x}{1 + x} \end{aligned}$$

3行目を4行めのようにできたのは、初項 a 、公比 r の無限等比級数の和が $\frac{a}{1-r}$ で与えられることを用いたからです。もっとも、そうなるためには $|r| < 1$ という条件がつきますが、ここでは不問にします。さて、ここで $x = 1$ を代入するとどうなるでしょう。もちろん

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

ですね。(1)と同じ方法で計算しましたが、結果は0ではありません。

次に(2)で行ったようにやってみましょう。それは

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots = x - (x^2 - x^3) - (x^4 - x^5) - (x^6 - x^7) - \dots$$

ということです。これは、次のように見るのが妥当でしょう。

$$\begin{aligned} x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots &= x - (x^2 - x^3) - (x^4 - x^5) - (x^6 - x^7) - \dots \\ &= x - x^2(1 - x) + x^4(1 - x) + x^6(1 - x) + \dots \\ &= x - (1 - x)(x^2 + x^4 + x^6 + \dots) \\ &= x - (1 - x) \cdot \frac{x^2}{1 - x^2} \\ &= x - \frac{x^2}{1 + x} \\ &= \frac{1}{1 + x} \end{aligned}$$

さて、ここで $x = 1$ を代入するとどうなるでしょう。もちろん

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

ですね。(2)と同じ方法で計算しましたが、結果は1ではありません。

続けて (3) です。(3) は直接計算したわけではなく、言わば方程式を解いたことになります。けれど直接計算するなら、

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots = x - (x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots)$$

ということです。これは、次のように見るのが妥当でしょう。

$$\begin{aligned} x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots &= x - (x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots) \\ &= x - \frac{x^2}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

さて、ここで $x = 1$ を代入するとどうなるでしょう。もちろん

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

ですね。(3) の結果は問題なく $\frac{1}{2}$ となりました。

最後は (4) で行った計算です。それは

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + (x^{11} - x^2) + (x^{13} - x^4) + \dots$$

ということです。これは、次のように見るのが妥当でしょう。

$$\begin{aligned} x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + (x^{11} - x^2) + (x^{13} - x^4) + \dots \\ &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^2(x^9 - 1) + x^4(x^9 - 1) + \dots \\ &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + (x^9 - 1)(x^2 + x^4 + x^6 + \dots) \\ &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 - (1 - x^9) \cdot \frac{x^2}{1 - x^2} \\ &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 - \frac{(1 + x + x^2 + \dots + x^7 + x^8) \cdot x^2}{1 + x} \end{aligned}$$

さて、ここで $x = 1$ を代入するとどうなるでしょう。もちろん

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

ですね。(4) と同じ方法で計算しましたが、結果は5ではありません。

正当な等式

さあ、はじめは同じ計算式なのに、解釈の仕方によって様々な値を得た

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

ですが、いきなり数値で計算せず、一旦無限級数の形で処理すると、いずれも値は $\frac{1}{2}$ となったことに注目しましょう。そうです。私たちは数値に目がくらんでしまったのです。数値に目が奪われたために、本来あるべき姿の計算ができなくなっていたのですね。結局、 $1-1+1-1+1-1+\dots$ の値が0や1や5になることは、全く不自然なことだったのです。

このことから

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\dots = \frac{1}{2}$$

は、全く正当な等式と言えるのではないのでしょうか。