◆不可思議な等式–4–◆

不可思議な解釈

ζ 関数にまつわる関係式の一端を見たところで、今回の話題の芯となった式

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

を再び評価してみましょう。はじめに示したように、これは

$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+\cdots &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+\cdots &= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}S &= 1-1+1-1+1-1+\cdots \\ &= 1-(1-1+1-1+1-\cdots) = 1-S \text{ より} \quad S=\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+\cdots &= 1+1+1+1+1+(1-1)+\cdots \\ &= 5 \end{aligned} \tag{4}$$

など、どんな値にでもなりました。しかし実際は、(3) とするのがもっともらしいことが分かったのです。すると今度は、他の値がもっともらしくないことを示さないわけにはいきません。今回の話題の締めくくりとして、真相を解明してみようと思います。

妥当な解釈

まず、以前に触れたように

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

は、単なる数値の無限和ではなく、x の無限級数

$$x-x^2+x^3-x^4+x^5-x^6+\cdots$$

に、$x=1$ を代入したものと考えることにします。

すると (1) で行ったことは

$$x-x^2+x^3-x^4+x^5-x^6+\cdots = (x-x^2)+(x^3-x^4)+(x^5-x^6)+\cdots$$

ということです。これは、次のように見るのが妥当でしょう。

$$
\begin{aligned}
x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \cdots &= (x - x^2) + (x^3 - x^4) + (x^5 - x^6) + \cdots \\
&= x(1-x) + x^3(1-x) + x^5(1-x) + \cdots \\
&= (1-x)(x + x^3 + x^5 + \cdots) \\
&= (1-x) \cdot \frac{x}{1-x^2} \\
&= \frac{x}{1+x}
\end{aligned}
$$

3 行めを 4 行めのようにできたのは、初項 a、公比 r の無限等比級数の和が $\dfrac{a}{1-r}$ で与えられることを用いたからです。もっとも、そうなるためには $|r| < 1$ という条件がつきますが、ここでは不問にします。さて、ここで $x = 1$ を代入するとどうなるでしょう。もちろん

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

ですね。(1) と同じ方法で計算しましたが、結果は 0 ではありません。

* * *

次に (2) で行ったようにやってみましょう。それは

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \cdots = x - (x^2 - x^3) - (x^4 - x^5) - (x^6 - x^7) - \cdots$$

ということです。これは、次のように見るのが妥当でしょう。

$$
\begin{aligned}
x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \cdots &= x - (x^2 - x^3) - (x^4 - x^5) - (x^6 - x^7) - \cdots \\
&= x - x^2(1-x) + x^4(1-x) + x^6(1-x) + \cdots \\
&= x - (1-x)(x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\
&= x - (1-x) \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \\
&= x - \frac{x^2}{1+x} \\
&= \frac{1}{1+x}
\end{aligned}
$$

さて、ここで $x = 1$ を代入するとどうなるでしょう。もちろん

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

ですね。(2) と同じ方法で計算しましたが、結果は 1 ではありません。

***

続けて (3) です。(3) は直接計算したわけでなく、言わば方程式を解いたことになります。けれど直接計算するなら、

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \cdots = x - (x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \cdots)$$

ということです。これは、次のように見るのが妥当でしょう。

$$\begin{aligned} x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \cdots &= x - (x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \cdots) \\ &= x - \frac{x^2}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

さて、ここで $x = 1$ を代入するとどうなるでしょう。もちろん

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

ですね。(3) の結果は問題なく $\dfrac{1}{2}$ となりました。

***

最後は (4) で行った計算です。それは

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \cdots = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + (x^{11} - x^2) + (x^{13} - x^4) + \cdots$$

ということです。これは、次のように見るのが妥当でしょう。

$$\begin{aligned} x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \cdots &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + (x^{11} - x^2) + (x^{13} - x^4) + \cdots \\ &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^2(x^9 - 1) + x^4(x^9 - 1) + \cdots \\ &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + (x^9 - 1)(x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\ &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 - (1 - x^9) \cdot \frac{x^2}{1 - x^2} \\ &= x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 - \frac{(1 + x + x^2 + \cdots + x^7 + x^8) \cdot x^2}{1 + x} \end{aligned}$$

さて、ここで $x = 1$ を代入するとどうなるでしょう。もちろん

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

ですね。(4) と同じ方法で計算しましたが、結果は 5 ではありません。

正当な等式

さあ、はじめは同じ計算式なのに、解釈の仕方によって様々な値を得た

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

ですが、いきなり数値で計算せず、一旦無限級数の形で処理すると、いずれも値は $\dfrac{1}{2}$ となったことに注目しましょう。そうです。私たちは数値に目がくらんでしまったのです。数値に目が奪われたために、本来あるべき姿の計算ができなくなっていたのですね。結局、$1-1+1-1+1-1+\cdots$ の値が 0 や 1 や 5 になることは、まったく不自然なことだったのです。

このことから

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

は、まったく正当な等式と言えるのではないでしょうか。