◆不可思議な等式–3–◆

振り返り

これまでの計算を振り返ってみましょう。振り返って戻る地点は

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \cdots = \frac{x}{1+x}$$

です。これは、初項 x、公比 $-x$ の**無限等比級数**でもあるので、その和を求める公式を知っている人にはおなじみのはずです。ただし、$|x| < 1$ という条件がついてましたけど。

この等式に行ったことは、両辺を x で微分することでした。それで

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}$$

を得ることができました。実際はここに $x = 1$ を代入しましたが、そこまでは振り返りません。

その次に導いた等式は

$$x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - \cdots = \frac{x}{(1+x)^2}$$

でした。これは、直前に得た等式の両辺に x を掛けたものであることに注意してください。

そして、この等式に行ったことは、両辺を x で微分することでした。それで

$$1^2 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \cdots = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

を得ることができました。

最後に導いた等式は

$$1^2x - 2^2x^2 + 3^2x^3 - 4^2x^4 + 5^2x^5 - \cdots = \frac{x-x^2}{(1+x)^3}$$

でした。これも、直前に得た等式の両辺に x を掛けたものであることに注意してください。

そして、この等式に行ったことは、やはり両辺を x で微分することでした。それで

$$1^3 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + 5^3x^4 - \cdots = \frac{1-4x+x^2}{(1+x)^4}$$

を得ることができました。

以上で、$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots = \dfrac{1}{120}$ が分かったわけです。次は $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \cdots$ の番ですが、そのためには $1^3x - 2^3x^2 + 3^3x^3 - 4^3x^4 + 5^3x^5 - \cdots$ を閉じた式にしなくてはなりません。でも、それって直前に得た等式の両辺に x をかければ済むことなんですよね。そう、すべきことが見えてきました。

$\mathbf{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \cdots =}$？？

では早速、直前に手に入れた等式の両辺に x を掛けて

$$1^3x - 2^3x^2 + 3^3x^3 - 4^3x^4 + 5^3x^5 - \cdots = \frac{x - 4x^2 + x^3}{(1+x)^4}$$

としましょう。当然のように、両辺を x で微分します。すると

$$1^4 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + 5^4x^4 - \cdots = \frac{1 - 11x + 11x^2 - x^3}{(1+x)^5}$$

を得ることができます。$x = 1$ を代入して

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \cdots = 0$$

ですから、

$$\begin{aligned} 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \cdots &= (1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \cdots) + 2(2^4 + 4^4 + 6^4 + 8^4 + \cdots) \\ &= (1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \cdots) + 2 \cdot 2^4(1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots) \end{aligned}$$

の変形を経て、$S = 0 + 32S$ より $S = 0$ と解くことができます。すなわち

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \cdots = 0$$

であることが分かりました。

* * *

続けて $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + \cdots$ の値を求めてみます。最後に得た等式の両辺に x を掛けて

$$1^4x - 2^4x^2 + 3^4x^3 - 4^4x^4 + 5^4x^5 - \cdots = \frac{x - 11x^2 + 11x^3 - x^4}{(1+x)^5}$$

としましょう。当然のように、両辺を x で微分します。すると

$$1^5 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + 5^5x^4 - \cdots = \frac{1 - 26x + 66x^2 - 26x^3 + x^4}{(1+x)^6}$$

を得ることができます。$x = 1$ を代入して

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \cdots = \frac{1}{4}$$

ですから、

$$\begin{aligned} 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + \cdots &= (1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \cdots) + 2(2^5 + 4^5 + 6^5 + 8^5 + \cdots) \\ &= (1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \cdots) + 2 \cdot 2^5(1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots) \end{aligned}$$

の変形を経て、$S=\dfrac{1}{4}+64S$ より $S=-\dfrac{1}{252}$ と解くことができます。すなわち

$$1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+\cdots=-\frac{1}{252}$$

であることが分かりました。

$\mathbf{1^n-2^nx+3^nx^2-4^nx^3+5^nx^4-\cdots=}$？？

さあ、何となく規則のようなものが見えてきました。それは

$$1^n-2^nx+3^nx^2-4^nx^3+5^nx^4-\cdots=\frac{|\,\text{係数}\,|\text{ が左右対称の }(n-1)\text{ 次式}}{(1+x)^{n+1}}$$

というものです。実際、分子の $(n-1)$ 次式において、定数項と係数だけを取り出してみると

$$\begin{array}{lllllll}
1 & -1 \\
1 & -4 & 1 \\
1 & -11 & 11 & -1 \\
1 & -26 & 66 & -26 & 1 \\
1 & -57 & 302 & -302 & 57 & -1 \\
1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1
\end{array}$$

となって、まるで**パスカルの三角形**を連想させます。

これら係数の規則が分かれば、等式に $x=1$ を代入するだけで

$$1^n-2^n+3^n-4^n+5^n-\cdots=\text{（何がし）}$$

が求められます。そして

$$\begin{aligned}
1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+\cdots&=(1^n-2^n+3^n-4^n+5^n-\cdots)+2(2^n+4^n+6^n+8^n+\cdots)\\
&=(1^n-2^n+3^n-4^n+5^n-\cdots)+2\cdot2^n(1^n+2^n+3^n+4^n+\cdots)
\end{aligned}$$

の変形を経て、$S=\text{（何がし）}+2^{n+1}S$ より S の値が分かるのです。そうは言うものの、規則を見つけるのは容易ではありません。かりに規則が分かっても、分数関数の微分を伴うので、次から次へと関係式を導くのは厳しいでしょう。

規則を見つける、ということであれば、$1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+\cdots$ に対して $n=1,\,2,\,3,\,4,\,5$ まで計算したので、この続きの規則を見破れるかもしれません。$n=1,\,2,\,3,\,4,\,5$ については

$$-\frac{1}{12},\quad 0,\quad \frac{1}{120},\quad 0,\quad -\frac{1}{252}$$

でした。あらら、たったこれだけでは規則は見つけられませんね。でも、偶数番目は 0 かなと思えます。また、奇数番目は正負交互に 0 へ収束しそうに思えます。本当はどうかというと、偶数番目が 0 というのは正し

いですが、奇数番目は 0 に収束するどころか、この後は正負交互に絶対値がどんどん大きな値になっていきます。まあ、詳しく知りたければそれなりの書物を読むことをおすすめします。

とりあえず、鑑賞はこの辺りで終えることにしましょう。この程度まで計算できれば十分ではないですか？

それに、計算ができることと結果が正しいことは別物です。計算は技術的な要素—技巧的なもの—を含みます。$-1+2=-(1-2)$ なども技巧だと思いますが、この計算が成り立つのは結合法則が保証されているからです。これまでに見てきたことは、技術的な計算にすぎません。結果が本当に正しいかどうかは、計算の技巧が正しいことを示す必要があります。そのためには、複素関数のことや解析接続のことなどを学ばなくてはなりません。そして、そのハードルは少し高いのです。