◆なぜそこに π が？◆

円周率 π は、その名が示す通り円に関わる値です。およそ 3.14 であることは誰もが知っているでしょう。たとえば半径 5 の円の面積は、円に関する面積の公式より

$$5 \times 5 \times \pi = 25\pi$$

とすることに何の異論もありません。ところが不思議なことに、およそ円に無縁と思われるところにも π が現れることがあるのです。

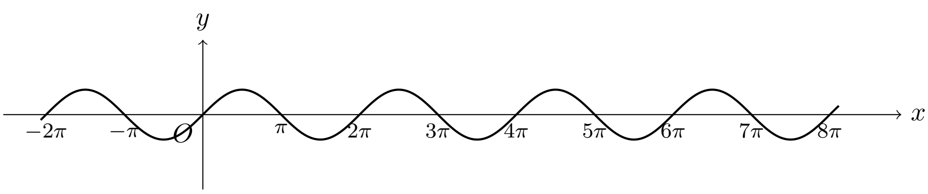
一つの例は、幅 1 の間隔で並んだ何本もの平行線が引かれた床に、長さ 1 の針を投げたとき、針が線にかかる（交わる）確率が $\dfrac{2}{\pi} \approx 0.6366$ である、というものです。五分五分より高い率ですね。「ビュフォン[*1]の針の問題」で知られています。この問題を初めて聞くと、どこにも円がないのに、なぜ確率に円周率が関わるのか不思議に思うことでしょう。理由は、確率を求める過程で針の回転具合を考えているからです。ここでは詳しく述べないので、興味がわいたら調べてみましょう。

別の例は、

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

というものです。計算は、自然数の平方の逆数和であって、どこに円との関わりがあるのかまったく分かりません。実際、この左辺の計算値がいくつになるかは、しばらく分からなかったようですが、オイラー[*2]が値を特定したと伝えられています。ここでは、なぜ自然数の平方の逆数和が $\dfrac{\pi^2}{6}$ と計算できるのかを、表面だけかいつまんで—といっても、ほんの少し三角関数の知識は必要ですが—説明してみましょう。

まず、$y = \sin x$ を考えます。この関数はグラフにすると



のような感じになっています。つまり $y = \sin x$ は、x 軸と $0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 4\pi,\ \ldots$ で交わっていることが分かりますね。

たとえば関数 $y = x(x^2 - 1)$ は、関数のグラフが x 軸の $x = 0$ と $x = \pm 1$ で交わります。ということは、x

[*1] ジョルジュ=ルイ・ルクレール・ド・ビュフォン（1707–1788）: フランスの博物学者・数学者。
[*2] レオンハルト・オイラー（1707–1783）: スイスの数学者・物理学者。

軸と $0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 4\pi,\ \ldots$ で交わる $y=\sin x$ が、もし多項式で表せるとしたら、きっと

$$y = ax(x^2-\pi^2)\{x^2-(2\pi)^2\}\{x^2-(3\pi)^2\}\{x^2-(4\pi)^2\}\cdots$$

のようになっているはずです。でも、これでは少しばかり具合が悪いのです。なぜなら $x\to\infty$ を考えると、$x,\ x^2-\pi^2,\ x^2-(2\pi)^2,\ x^2-(3\pi)^2,\ \ldots$ などの因数は、どれもほとんど ∞ になっていると考えられます。するとこれらの無限積である y の値は ∞ でしょう。ところが $y=\sin x$ は、x の値がどれだけ大きくなろうとも、幅 2 の間で波打っているのですから、つじつまが合いません。

そこで少し式をいじって、つまり各因数を x^2 で割った形を用いて

$$y = ax\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{(2\pi)^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{(3\pi)^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{(4\pi)^2}{x^2}\right)\cdots$$

とするのはどうでしょう。これなら $x\to\infty$ を考えたとき、$1-\dfrac{(\text{何がし})^2}{x^2}$ で表された各因数はすべて 1 より小さくなります。なぜなら、先頭付近では $\dfrac{(\text{何がし})^2}{x^2}$ において、小さな値の (何がし) に対して $x\to\infty$ ですから、$1-\dfrac{(\text{何がし})^2}{x^2}$ は 1 に近い値でしょう。また、ずっと後ろの方においては、とても大きな値の (何がし) に対して $x\to\infty$ ですから、$1-\dfrac{(\text{何がし})^2}{x^2}$ は 0 に近い値でしょう。

そうすると、先頭の ax —ここは a の正負によって $+\infty$ か $-\infty$ になっている—と、1 から 0 の値をとる各因数の無限積が幅 2 の範囲に収まるかどうかは微妙ですが、さっきよりよい感じにはなりました。でも、これも少々具合悪いのです。それは、ax 以降の各因数が 1 から 0 の値をとるなら、各因数の積である y は、常に正か常に負になるはずです。しかし、$y=\sin x$ は正負を交互にまたぎますから、これでは正確に $y=\sin x$ を表したとは言えません。

しかし、悲観するのは早いでのす。各因数の分子・分母を入れ換えて

$$y = ax\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(4\pi)^2}\right)\cdots$$

としてみましょう。このようにしてしまうと、$x\to\infty$ を考えたとき、先頭の x からの因数は $\infty,\ -\infty,\ -\infty,\ \ldots$ となって、その積である y も $+\infty$ か $-\infty$ になってしまいそうです。でも、ずっと後ろの方では、$1-\dfrac{x^2}{(\text{何がし})^2}$ はほとんど 0 に近い値のはずです。問題はこのような積を考えた場合、先頭付近の ∞ と後ろの方の 0 に近い値のどちらが勝るのでしょうか。

私には、それを言い切ることができないので、表計算ソフトで調べることにします。たとえば $a=1$ として

$$
\begin{aligned}
x=\tfrac{\pi}{2}\text{のとき}\quad & y=\tfrac{\pi}{2}\left(1-\tfrac{(\pi/2)^2}{\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{(\pi/2)^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\tfrac{(\pi/2)^2}{(3\pi)^2}\right)\left(1-\tfrac{(\pi/2)^2}{(4\pi)^2}\right)\cdots\\
x=\tfrac{3\pi}{2}\text{のとき}\quad & y=\tfrac{3\pi}{2}\left(1-\tfrac{(3\pi/2)^2}{\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{(3\pi/2)^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\tfrac{(3\pi/2)^2}{(3\pi)^2}\right)\left(1-\tfrac{(3\pi/2)^2}{(4\pi)^2}\right)\cdots\\
x=\tfrac{5\pi}{2}\text{のとき}\quad & y=\tfrac{5\pi}{2}\left(1-\tfrac{(5\pi/2)^2}{\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{(5\pi/2)^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\tfrac{(5\pi/2)^2}{(3\pi)^2}\right)\left(1-\tfrac{(5\pi/2)^2}{(4\pi)^2}\right)\cdots\\
& \vdots
\end{aligned}
$$

を計算してみるのです。無限積といっても、因数の分母は $\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \ldots$ と変化するだけなので、セルを上手に使ってコピーすれば、数百の因数の積を求めるのは苦ではないと思います。

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のときの正確な値は $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ ですが、実際、百行ほどコピーすれば 1 に収束しそうな様子を見ることができるはずです。$\sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$、$\sin\dfrac{5\pi}{2} = 1$、$\ldots$ であることを確かめるなら、因数の分子を $\dfrac{3\pi}{2}$、$\dfrac{5\pi}{2}$、$\ldots$ と変更していくだけです。いずれも -1 や 1 に収束していきそうな様子が観察できるでしょう。このことから、$\sin x$ を因数の無限積で表すなら

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(4\pi)^2}\right)\cdots$$

であることの信憑性が増したのではないでしょうか。そして実際、これは正しいのです。

さて今度は、ここで明らかになった $\sin x$ の無限積を展開して、多項式で表すことを試みましょう。無限積の展開など想像もできないと思うかもしれませんが、それほど大変なことではありません。先頭の x は横に置いて、2 番目の因数から $-\dfrac{x^2}{\pi^2}$ を選んで残りの因数からはすべて 1 を選んで掛ければ、$-\dfrac{x^2}{\pi^2}$ という項が現れます。3 番目の因数から $-\dfrac{x^2}{(2\pi)^2}$ を選んで残りの因数からはすべて 1 を選んで掛ければ、$-\dfrac{x^2}{(2\pi)^2}$ が現れます。このように、ある 1 つの因数から $-\dfrac{x^2}{(k\pi)^2}$ を選んで残りはすべて 1 を選べば $-\dfrac{x^2}{(k\pi)^2}$ が現れるわけですから、横に置いた x を掛けてしまえば x^3 を持つ項が

$$-\frac{x^3}{\pi^2} - \frac{x^3}{(2\pi)^2} - \frac{x^3}{(3\pi)^2} - \frac{x^3}{(4\pi)^2} - \cdots$$

であることが分かるのです。ここから $-\dfrac{x^3}{\pi^2}$ をくくり出せば

$$-\frac{x^3}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

です。$\sin x$ の無限積を展開した項の中には、いま私たちが値を知りたい式が含まれているのです。

ちなみに、先頭の x の他はすべて因数の中の 1 を選んで掛けることで x になりますが、x の項はこれだけです。さらに、この調子で因数から選ぶ項を選別すれば x^5 の項なども現れるのですが、いまは深入りしないことにします。結局、$\sin x$ の無限積を展開したら、多項式のはじめの方は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) + x^5(\text{何がし}) + \cdots$$

となっていることが判明したのです。

さて、ここで話を違う方面に振ることにします。何となく無理矢理っぽい方法で $\sin x$ を無限積で表し、その展開式の一部の項を取り出すことに成功しましたが、$\sin x$ はテイラー[*3]展開すると

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

[*3] ブルック・テイラー（1685–1731）：イギリスの数学者。

になることが知られています。さっきは $\sin x$ の無限積の展開で

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right) + x^5(\text{何がし}) + \cdots$$

を求めたのでしたね。どちらも $\sin x$ を表す多項式なので、x^3 の項は一致しているはずです。つまり

$$-\frac{x^3}{3!} = -\frac{x^3}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$$

ということなので、両辺に $-\dfrac{\pi^2}{x^3}$ を掛ければ . . .、ジャーン！

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

が分かりました。