

◆その 4/3 って何？-1-◆

なんで？

円の面積が(半径)×(半径)×3.14で求められることは小学校で習うことです。中学校では、半径を r 、3.14を π で表して πr^2 と表現します。このことは結構、疑問に思わないで使うようです。それで、中学校や高校で、円の面積を発展させて球の体積を求める公式を習うと、球の体積が $\frac{4}{3}\pi r^3$ で求められることを知らされません。これを聞いた途端、その $\frac{4}{3}$ って何？という疑問を持つ人は多いようです。何って、それが公式なんだよ、と言っても理解してもらえません。どうやら分数が気になるようです。もし、球の体積を求める公式が πr^3 だったら、きっと疑問に思わないのでしょうか。

一般に、球の体積を求めるには積分をするのが手っ取り早いのですが、中学生や積分を習う前の高校生に対しては無理な話です。そのため「まあ、そういう公式が知られているんだよ。積分を学べば分かるから」なんて言って、お茶を濁すのが関の山です。でも、何で $\frac{4}{3}$ なんだという声はやみません。積分を学べば分かることなら、いまはとりあえず覚えておこうと考えられれば問題はありません。積分を習ったときに疑問は氷解するはずですから。けれど、そうじゃない考え—積分はいいから理由だけ簡単に知りたいんだ—の場合は不幸ですね。積分が要るって言ってるのに...

実際は、積分を用いなくても、なんとか中学生に理解できるような説明はあるんです。でも、それは簡単な説明ではないので、声を抑える役には立たないかもしれません。それでも紹介しておきましょう。

円周率

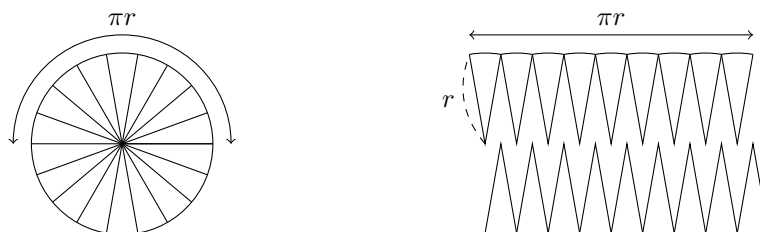
最初は円の性質からです。円には直径と円周があります。いろいろな大きさの円を描いてみれば、円の直径と円周を測ることができます。直径は定規で測るとしても、円周を測るのは大変です。円い定規なんてないでしょうから、円周に沿ってひもを置き、そのひもの長さを測るのがせいぜいのところでしょう。いろいろな大きさの円を測定すれば、様々な直径と円周の値が得られますが、その比 $\frac{(\text{円周})}{(\text{直径})}$ は大体“3強”の値になるはずです。このことから、円は大きさに関わらず円周と直径の比が一定の値になることが分かります。

これは、理屈の上からも分かることです。もし、ある円の直径の長さが D 、円周の長さが L であれば比は $\frac{L}{D}$ です。そして、この円を k 倍に拡大(または縮小)すると、直径は kD 、円周は kL ですから比は $\frac{kL}{kD} = \frac{L}{D}$ で変わりません。つまり、円周と直径の比はどんな円に対しても一定の値になるわけです。この比を私たちは円周率と呼ぶのです。

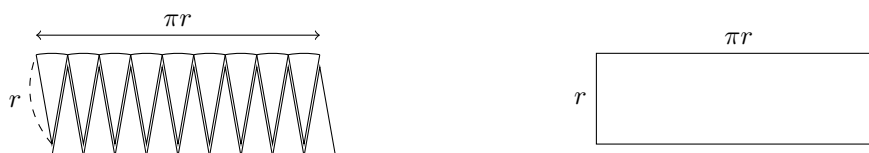
円の面積

円周率は、実測することによって大体3強の値であるとか、ちょっと高度な計算で約3.14であることが分かるのですが、円の面積を求めるには正確な値はいつでもよいのです。 $\frac{L}{D} = \pi$ であることが理解できていれば十分です。ただし、円の面積を求めるには、直径 D ではなく半径 r を用いて計算することにして、 $D = 2r$ と考えて $\frac{L}{2r} = \pi$ としておきましょう。この式の両辺に $2r$ を掛けて $L = 2\pi r$ です。これは、円の面積を求める際に鍵となる式になります。

円の面積は長方形の面積と違って簡単に求められません。ただ、工夫次第で円を長方形に押し込むことができます。そのために円を、中心から放射状に等分して—偶数個が具合よいでしょう—小さな扇形に分けます。



このとき、上半分と下半分の扇形の集まりを別々に広げて噛み合わせます。ところで、 L が円周の長さで $L = 2\pi r$ ならば、半円周の長さは πr ということなので、噛み合わせた図形の横の長さは、多少の波を打っているものの πr の長さで近似できます。また、噛み合わせた図形はやや傾いていますが、縦方向は半径の r に等しい長さと考えてよいでしょう。

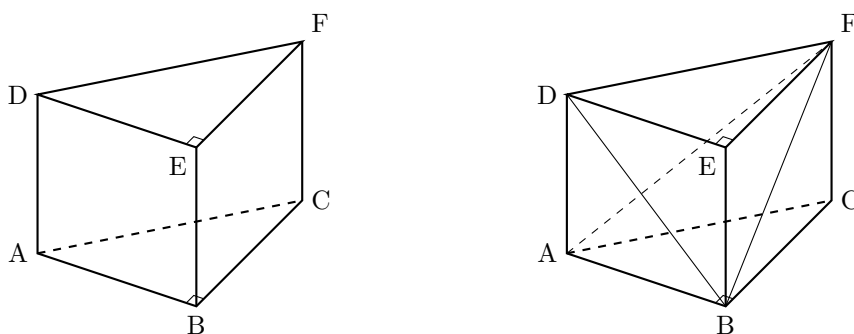


さて、ここで厳密な証明抜きに、感覚的に納得してもらいたいことがあります。左の図は、円を18個の扇形に分けて噛み合わせたものですが、分割をもっと細かい—極端な話、無数の—扇形に分けて噛み合わせたらどうでしょう。すると、それは横 $2\pi r$ 、縦 r の長方形と見なせるでしょう。見なせるというとインチキ臭いのですが、実際は極限の考えにより等しいことが示せます。いまは感覚的な想像力で納得してもらいますが、これで半径 r の円が、横 $2\pi r$ 、縦 r の長方形と見なせることになりました。したがって円の面積は $\pi r \times r = \pi r^2$ で計算できます。

円錐の体積

円の面積の式が分かったところで、次は円錐（えんすい）の体積を求める式です。底面の円の半径を r 、高さを h とする円錐の体積は $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ で求められます。底面積 πr^2 に高さ h を掛けると円柱の体積であることは理解しても、円錐が円柱のちょうど $\frac{1}{3}$ であることは不思議なことです。もしかすると、球の体積の公式より前に、その $\frac{1}{3}$ って何? と考えたかもしれません。これも積分を習えば分かるよ、と言いたいのですが、積分を用いなくて納得してもらおうのがここでの目標です。

円錐の前に、底面が直角三角形である三角柱（直角三角柱）を考えます。それを、右のように三つの三角錐に分けるのですが、どこに三つの三角錐があるか見えますか？

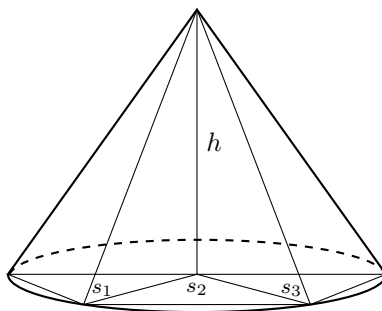


三角錐を「頂点-底面」のように表すと、三つの三角錐は、A-BCF と D-BEF と F-DAB です。まず A-BCF と D-BEF ですが、これらの底面は側面の長方形 BCFE を 2 分割しているため同面積です。高さはそれぞれ AB と DE で、これも等しいので A-BCF と D-BEF は同じ体積のはずです。この時点では、三角錐の体積を求める式はないのですが、底面積と高さが等しい立体は体積も等しいと見なしています。

ところで D-BEF は、頂点を F と見直して F-BED と見ることもできます。すると同じ理屈で F-BED（実は D-BEF）と F-DAB も同じ体積になるはず。これらのことから、3 つの三角錐の体積は等しいことが分かります。すなわち、底面が直角三角形である三角錐（直角三角錐）は、直角三角柱の $\frac{1}{3}$ の体積であることが言えました。

底面が直角三角形でなく、一般の三角形ならどうでしょう。しかし、一般の三角形というのは必ず二つの直角三角形に分割できるので、一般の三角錐は二つの直角三角錐を貼り合わせたものと考えられます。それぞれの直角三角錐が直角三角柱の $\frac{1}{3}$ の体積なら、その貼り合わせである一般の三角錐でも三角柱の $\frac{1}{3}$ の体積になっています。結局、底面積が S で高さが h の三角錐の体積は $\frac{1}{3}Sh$ であるということです。

これで、ようやく円錐の体積を考えることができます。



円錐の場合は、いくつかの三角錐に分割して近似することができます。分割された三角錐の底面積を s_1, s_2, s_3, \dots とし、高さを h と考えましょう。すると、それぞれの三角錐の体積は $\frac{1}{3}s_1h, \frac{1}{3}s_2h, \frac{1}{3}s_3h, \dots$ です。三角錐を無数に分割して、それらを全部集めれば円錐が近似できるので、円錐の体積は

$$\frac{1}{3}s_1h + \frac{1}{3}s_2h + \frac{1}{3}s_3h + \dots = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3 + \dots)h$$

でよいでしょう。底面は無数の三角形に分割されているので、 $(s_1 + s_2 + s_3 + \dots)$ は円の面積と見なせます。やはり円錐においても、体積は円柱の $\frac{1}{3}$ と言えるのです。