◆乗数・被乗数の常識・非常識◆

「1 あたり量」というものがあります。もちろん、掛け算をするときに用いる考えです。3 個入りのキャラメル箱では 1 あたり量は 3 個、$8\mathrm{m}^2$ の花壇に 20 本の花が咲いていれば 1 あたり量は 2.5 本、となるわけです。すると、いまのキャラメル箱を例にとれば、同じ箱が 5 つあるときは

$$(1\text{ あたり量 }3\text{ 個})\times 5=15(\text{個}) \tag{1}$$

のキャラメルがあることになります。また、花壇の例では、$2\mathrm{m}^2$ の一角には

$$(1\text{ あたり量 }2.5\text{ 本})\times 2=5(\text{本})$$

の花が咲いている計算になるでしょう。

このような計算では 1 あたり量を「被乗数」と呼び、1 あたり量がどれだけあるか示す数を「乗数」と呼びます。乗数は「加える回数」と考えてもよいので 、(1) は 3 を 5 回加える意味にとって

$$3\times 5=3+3+3+3+3$$

と考えてもかまいません。ただ、乗数が常に加える回数になるとは限りません。花壇の例で $5.3\mathrm{m}^2$ の一角を考える $2.5(\text{本})\times 5.3$ では、5.3 を加える回数とは呼べないでしょう。端数があっても掛け算の本質に影響はありませんが、ここでは端数のない乗数で考えることにします。

いずれにせよ、掛け算の基本は

$$(\text{被乗数})\times(\text{乗数})=(1\text{ あたり量})\times(\text{数量})$$

になっています。特に (乗数) が自然数のときは、(数量) を (加える回数) と読み替えることができます。このことから (1) を

$$5\times 3=15 \tag{2}$$

とするのは、答はあっていても式が違うと解釈されることもあるようです。実際、15 の答は $3+3+3+3+3$ より求められるはずですから、(2) の掛け算の解釈が

$$5\times 3=3+3+3+3+3$$

となり、(乗数) を (被乗数) 回加えるという変な結果になりそうです。

本当にそうでしょうか?

私からの結論は「3 個入りのキャラメル箱が 5 つあるときのキャラメルの総数」は

$$3+3+3+3+3=3\times 5=15 \tag{3}$$
$$3+3+3+3+3=5\times 3=15 \tag{4}$$

のいずれでも、文句なく正解というものです。文句なくというのは、立式も答も正しいということです。(4) の感覚には馴染めない人も多いでしょうが、間違いなく正解です。

まず、(3) と (4) が共に正しいとする理由に、日本語と英語の言葉の特性をげましょう。日本語で「3×5」は「3 かける 5」と読み、「3 を 5 回合わせる」意味にとりますから (3) が自然な立式になっています。また、英語でも「3×5」は「$3\mathit{multiplied\ by}5$」と読み、「5(回) にわたって増殖される 3」の意味なら (3) とするのでしょう。ただ、普段は「3×5」を「$3times5$」と読みますから、「5 の 3 回分」の意味あいで「$3\times 5=5+5+5$」と考えることもできます。すると英語では、「5×3」のときが「$5times3$（3 の 5 回分)」ですから、(4) がまったく自然な立式だと思われます[*1]。

したがって、掛け算における乗数・被乗数の関係は

$$(\text{被乗数})\times(\text{乗数})=(1\text{ あたり量})\times(\text{回数})$$

にもなり得るし、

$$(\text{被乗数})\times(\text{乗数})=(\text{回数})\times(1\text{ あたり量})$$

にもなり得るわけです。

実は掛け算とは、繰り返し同じ数を加える足し算 $a+a+\cdots+a$ において、記号 $\times$ と繰り返しの回数 n を用いて書き直した式を指しているのです。この基準に従えば、$a+a+\cdots+a$ を $a\times n$ と書き直そうが $n\times a$ と書き直そうがかまわないのです。だって、ちゃんと記号 $\times$ と回数 n が明示されているんだから。にも関わらず日本では $a+a+\cdots+a=a\times n$、アメリカでは $a+a+\cdots+a=n\times a$ と固定・習慣化されているのは、$\times$ の前後で 1 あたり量である a と回数である n の区別がつくからでしょう。つまり 4×7 のとき、日本では 4 が 1 あたり量である a、アメリカでは 7 が 1 あたり量である a という具合にです。

それならば日本語で考えたら、「3 個入りのキャラメル箱が 5 つあるときのキャラメルの総数」を求める式は $3+3+3+3+3=3\times 5$ が当然であって、5×3 になるわけないじゃない。だからこの問題を $5\times 3=15$ とする人は、考え方が間違っているんだよ、と反論したい気持ちになるでしょう。ところが、一概にそうとは言えないのです。実は、日本語と英語の特性とは無関係であることが説明できます。話はちょっと長くなりますが、聞いてください。

[*1] ここの段落の内容は、実際にアメリカで子供を小学校に通わせている方が、そこのアメリカ人数学教師から受けた回答をもとに作成しました。

まず始めに、次の文章を式にしてみましょう。

(a)　3 つ子が 2 枚ずつの切符を持っている
(b)　3 つ子が 2 回自動改札を通過する

(a) では切符の総数を、(b) では改札を通過したのべ人数を求めるものとします。このとき、文章の内容を考えながら足し算で立式すると、きっと日本語も英語も同じ式になるはずです。おそらく自然に

$$\text{(a)}\quad 2+2+2$$
$$\text{(b)}\quad 3+3$$

となるでしょう。そして日本語であれば (a) は $2+2+2=2\times 3$ と書くはずです。もし (a) を日本語で考えていながら $3+3$ と見る人がいるなら、その人は (右手の切符 3 枚) + (左手の切符 3 枚) と見ていなくてはなりません。と同時に、その人は別の 1 あたり量を持っていることに注意しましょう。つまり (a) を $2+2+2$ と見れば、1 あたり量は（1 人あたり）2 枚ですから $2+2+2=2\times 3$ ですが、$3+3$ で見ている人の 1 あたり量は（片手あたり）3 枚ですから $3+3=3\times 2$ なのです。この見方は特殊な見方だと思いますが、だからといって間違った解釈でもありません。そのような理由から、(a) の立式が 2×3 になることも 3×2 になることもあり得ると思うのです。

このことは (b) に対しても同様で、(b) を日本語で考えていながら $2+2+2$ と見る人がいるなら、その人は（3 つ子の中の）(A が 2 回) + (B が 2 回) + (C が 2 回) と見ているはずです。もちろんそのときは 1 あたり量が変化しています。$3+3$ なら 1 あたり量は（1 回あたり）3 人で、$2+2+2$ なら 1 あたり量は（1 人あたり）2 回です。

そうなってくると、掛け算の式を見ただけでは、どちらの数が 1 あたり量なのか判別するのは難しいでしょう。実際のところ (a)、(b) 共に掛け算で立式した場合、日本語で思考しても英語で思考しても、ほとんどの人が 3×2 とするでしょう。なぜなら式を作る際には、いちいち 1 あたり量のことは頭にないでしょうから。この計算は掛け算で求めることができ、掛け算においては掛ける順序は問題にならないために、きっと文章の中で先に現れた数から掛け始めると思われます。だから質問が

(a)　2 枚ずつの切符が 3 つ子に持たれている
(b)　2 回にわたって 3 つ子が自動改札を通過する

のような言い方になっていたら、きっと 2×3 とする人が大部分を占めると予想されます。

たしかに「始めに 1 あたり量ありき」と考えれば、1 あたり量が何であるかを明確にし、そこに数量を掛ける式を作るべきでしょう。その考えなら (a) は 2×3 であり、同時に日本語での思考と注釈がつくでしょう。でも、必ずしも「はじめに 1 あたり量ありき」ではないはずです。英語なら「はじめに回数ありき」が自然な思考だからです。そのとき (a) では、はじめに子供の 3 人に目がいき、その後、各自が 2 枚ずつの切符を手に

していることがわかるというものです。その考えなら (a) は 3×2 ですね（この式は片手の 3 枚の 2 倍ではなく、2 を 3 回加える英語風の立式となっています)。

現代ではむしろ、後者の考えのほうが有利かもしれませんよ。それは例えば「2 を繰り返し 10 回足す」プログラムを書く場合

```
for(i = 1; i <= 10; i++) p += 2;
```

のような書き方をしますが、見てわかるように「始めに回数ありき」の記述になっているからです。1 回あたりに加えられる 2 が登場するのは、回数のあとになっています。

結局のところ日本語では

$$(1\text{ あたり量})\text{ を }n\text{ 回足す} \quad\Longleftrightarrow\quad (1\text{ あたり量}) \times n$$

であることは間違いないけれど、「3 個入りのキャラメル箱が 5 つあるときのキャラメルの総数」を求める式が「5×3」と書かれたからといって、考え方が違うとは言い切れないというわけです。なにしろ、地域やその人ごとに、それぞれの自然体があるはずですから。