

◆比の無い所に正弦は立たない◆

(「素直な単位/ラジアン」からの続き)

三角関数を考えた場合、ラジアンを角の単位に使うと具合がよいことはすでに述べました。その際に、 2π ラジアンと 360° は「対等」ではあるが「同等」ではない、という妙な言い回しをしました。先にそのことに触れておきましょう。

「対等」とは相対して等しいと書いていますが、とくに相対する必要はありません。本質的に違うけれど同じとみなせるものが対等です。身近に対等を感じるができるものには買い物があります。どう見たって貨幣とパンは別物ですが、ちゃんと交換ができます。これは貨幣価値とパンの価値を同じと見ているからです。この場合、貨幣とパンは対等の関係にあります。しかし、貨幣とパンはまったく同等とは言えませんね。なぜなら、貨幣を食べてお腹を満足させるわけにいかないのですから。

$y = \sin x$ において、 x の単位が「 $^\circ$ 」であってもラジアンであっても、 y の値を求められたり関数のグラフを描けることに変わりありません。でも「 $^\circ$ 」がラジアンと同等に扱えるのはそこまでです。なぜなら、三角関数と多項式との関係を十分満足させるには、 x の単位がラジアンである必要があるからです。

それでは、「 $^\circ$ 」とラジアンを同等に扱えるのはどの段階まででしょうか。結論を言えば、比を意識しない段階までです。たとえば

$$60^\circ \quad \text{と} \quad \frac{\pi}{3}$$

は同等に扱えます。 $\frac{\pi}{3}$ は実際のところ、半径 r の円に対する弧の比が $\frac{\pi}{3}$ となる角の大きさです。しかし私たちは角の大きさを考えるとき、そこに比を意識することはありませんでした。おそらく弧度法を使うほとんどすべての人は、 $\frac{\pi}{3}$ から比を連想しないでしょう。 $\frac{\pi}{3}$ から連想するならば、正三角形の一つの内角の大きさのほうでしょう。それは分度器が 60° の目盛りを示すことと何ら変わりはないのです。

では

$$\sin 60^\circ \quad \text{と} \quad \sin \frac{\pi}{3}$$

はどうでしょう。sin がからんでくると比の値が見え隠れします。しかし、半径 1 の円周上における y 座標が sin の値であると意識するとき、そこでは比という感覚が奥へ引っ込むのです。したがって単に三角比の値を求めるだけなら、比を意識しない状況下にあると言えます。もし話をここで止めたら、「 $^\circ$ 」とラジアンは同等でしょう。

しかし話は続きます。もう少し $\sin \theta$ の観察をしましょう。次の表は θ が小さい角度における $\sin \theta$ の振る

舞いです。

$\theta(^{\circ})$	$\theta(\text{ラジアン})$	$\sin \theta$
5.00000000	0.08726646	0.08715574
4.00000000	0.06981317	0.06975647
3.00000000	0.05235988	0.05233600
2.00000000	0.03490659	0.03489950
1.00000000	0.01745329	0.01745241
0.40000000	0.00698132	0.00698126
0.20000000	0.00349066	0.00349065
0.10000000	0.00174533	0.00174533
0.01000000	0.00017453	0.00017453

θ をラジアンで考えると、 θ と $\sin \theta$ の値が結構近いことがわかります。この場合

$$\theta(\text{ラジアン}) \approx \sin \theta \quad (1)$$

ですね。決して $\theta(^{\circ}) \approx \sin \theta$ となっているわけではありません。

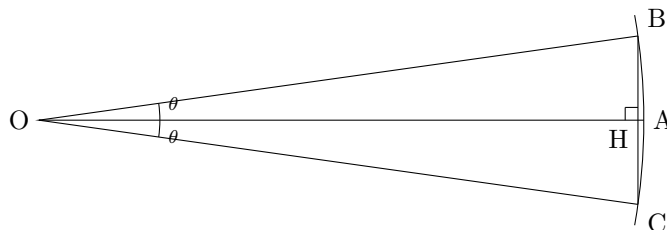
でも、ちょっと待ってください。たしかに $\theta(^{\circ})$ では $\sin \theta$ の値からかけ離れていますが、 $180^{\circ} = \pi$ なんかから $1^{\circ} = \frac{\pi}{180} = 0.01745329$ になるでしょう。結局は「 $^{\circ}$ 」でもラジアンと同じことが言えるのでは？と思えますね。

そう、そうなんです、微妙な点で $180^{\circ} = \pi$ とすることが間違っています。それは、「 $^{\circ}$ 」が単一の尺度で測る「単位」であるのに対し、ラジアンは2値の尺度から求める「無単位の比」ですから、性質が違います。厳密に等号で結ぶことなどできないはず。だから「 $^{\circ}$ 」とラジアンを「同等」に扱うわけにいかないのです。あくまでもラジアンという比があつての $\sin \theta$ なのです。

でも、ついつい $180^{\circ} = \pi$ と書きたくなる気持ちは否定できません。なぜなら、いくらラジアンの本質が比であると叫んでも、比の匂いを感じさせないのですからね。

なんだか歯切れのわるい言い回しになってしまいました。しかし、角 θ をラジアンで考えたとき、(1) の関係が見えてくるのは重要な意味を持っています。それは、比が見え隠れする $\sin \theta$ を、比を意識させない θ に置き換えることができるからです。このことは、 $\sin \theta$ の値が必要になったとき、 θ で代用してもかまわないと言っているのです。もちろん、 θ が小さい角のときに限るのですが。

ところで θ が小さい角の場合、 $\theta \approx \sin \theta$ になるのは、図を描いて見ればしごく当たり前のことかも知れません。図は半径1の円 O から、角 θ だけの扇を二つ分抜き出しています。



ここで θ をどんどん小さくすれば、BH の長さ と 弧 BA の長さが非常に近いものになることが目で理解できます。ところで $BH = \sin \theta$, 弧 $BA = \theta$ ですから、 θ が小さい角であるほど $\sin \theta$ と θ が近い値になるといえるのです。

実を言うとこの見方は、アルキメデス*1が円周率を計算する際に、円に内接する正 n 角形を作った方法と同じです。ただし、円に内接する正 n 角形を考えた場合、正 n 角形の一辺は弦 BC であり、それに対応する円周は弧 BC であることに注意してください。

アルキメデスは $\theta \rightarrow 0$ として弦 BC の長さを一周分集めれば、円周の長さに極めて近くなると考えました。つまり、正弦を用いて円周を近似するわけです。これを三角比を用いて述べれば、 $\theta \rightarrow 0$ として $2 \sin \theta$ を一周分集めれば、長さ 2θ の弧が集まって円周を近似できるというものです。 θ はラジアンで測っていたので、結局一周の長さは 2π になるのです。

おやおや、何やら複雑なことになってきました。と言うのは、アルキメデスの方法は、円周の長さ 2π を求めるのに $\sin \theta$ を使って近似していますが、そもそも $\sin \theta$ に使われている角は π から導いたラジアンであったはずで、アルキメデスの方法は言わば、長さが分からないはずの円周を、ラジアン（これは円周の長さ 2π を基準に作られた！）を用いた正弦比で測るようなものです。これでは「ニワトリが先かタマゴが先か」という問題と同じですね。それならラジアンでなく「°」を使えばよいかというと、そういうわけにもいきません。「°」を使っても本質は変わらないのです。なにしろ円周比 π を仮定した上での正弦比なので、

さあ、大変奇妙な事態になってきました。ここまでかなり長い時間をかけて、三角比や角について語ってきたのは何だったのでしょうか。それとも、どこかで間違いをおかしていたのでしょうか。しかし、あからさまな間違いをおかしたとも思えません。なぜなら、「°」を使ってもラジアンを使っても三角比はきちんと機能していました。では、三角比を三角関数に拡張したところでおかしなことになったのでしょうか。いいえ、そんなこともないでしょう。三角関数においても、「°」やラジアンを使って関数のグラフだって描けるのですから。

すると問題があるとすれば、三角関数以前に違いありません。つまり角度が混乱の原因を作ったのではないかということです。では「角度」って何？ もしかしたら私たちは、角度の何たるかを理解しないまま三角比がどうの、三角関数がどうのと言っていたのではないのでしょうか。そんなことはあり得ないとも考えられま

*1 シラクサのアルキメデス (287?B.C.-212B.C.): 古代ギリシアの数学・物理学者。

せんね。なにしろ角度なんて、日常的に2直線が交差する場所にできるもので、その大きさを「°」という単位で表したものですから。そして「°」よりちょっとだけ具合よくするためにラジアンを持ち出したのです。

また、交差の仕方がゆるいほど、大きい数値で表すやり方も悪くはないはずです。数学では、日常の感覚の延長を大事にしていますから、このやり方はまったく自然です。

それでも、あえて言いましょう。やっぱり私たちは角度の何たるかを理解していないのです。(⇒ 続きは「正しい？そして難解な角度の測り方」にて。)