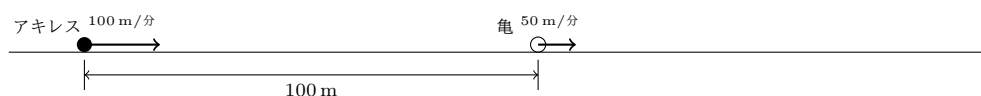


◆進んでも進んでも追いつけない◆

(「数学的帰納法とアキレスと亀と」からの続き)

数学的帰納法は本当に信用ならない論法なのでしょうか。『アキレスと亀』の話が割り込んでくるとそんな気になってしまいます。それでは話をややこしくしているアキレスと亀の話がまったく正しいことから説明していきましょう。

アキレスが亀の後ろから競走を始めるとして、この2者にもう少し具体的な数値を与えて考えることにします。まず、アキレスは亀の100m後ろからスタートします。アキレスは1分で100mを走り、亀は1分で50mを走るものとします(現実的ではありませんが今後の計算をしやすくするためです)。



では、少し計算をしてみましょう。まずアキレスは亀まで100mあるので、少なくとも1分間走らなければ亀の位置にたどりつけません。しかしこの1分間に亀は50m先に進んでいるはずですが、それでも1分後には、アキレスと亀の間の距離は50mに縮まることになります。



続いてアキレスは残った50mを走らなければ亀の位置にいけません。アキレスはこの50mを $\frac{1}{2}$ 分で走ることができます。と同時に亀はこの $\frac{1}{2}$ 分の時間で25m進めます。この結果 $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ 分の時間をかけて、アキレスは亀との距離を25mまで縮めました。



さらにアキレスは残った25mを埋めるために走ります。25mの距離をアキレスは $\frac{1}{4}$ 分で走ることができます。と同時に亀はこの $\frac{1}{4}$ 分の時間で12.5m進めます。この時点でアキレスは亀まで12.5mまで接近しました。これまでにかかった時間は $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ 分です。

このペースで考えれば、次は $\frac{1}{8}$ 分の時間をかけてアキレスは亀との距離を6.25mに縮めます。しかしこれではいつまでたってもアキレスは亀に追いつけないことを確認できるだけです。この論理が正しいとは言えま

せん。でもちょっと待ってください。このペースで考えれば、アキレスは亀に追いつけないものの徐々に亀との距離を縮めています。アキレスはそのためになんだけの時間をかけているのでしょうか。

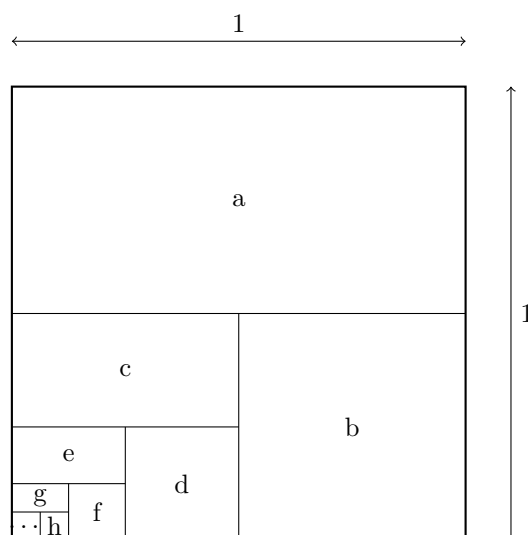
この話でアキレスが走らなければならない時間は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad (1)$$

です。結論から言いましょ。この合計時間は2分です。無限に足し算をしているにも関わらず合計がちょうど2分になる。少し変な感じですがこの説明は後でしましょ。

つまりアキレスと亀の話は、競走を始めてから2分間の時間でなされることを言っていたわけです。現実の問題ではアキレスは2分後に亀に追いついて、そして何ごともなかったように追い抜いていきます。2分経過する前はアキレスはまだ亀の後方にいますから、その範囲において追いつけないのは当然なのです。したがって2分間の論理としてアキレスと亀の話はまったく正しいのです。

では(1)は本当に2になるのでしょうか。



それを確認するのに、一辺の長さが1である正方形をタイルで埋めていく状況を頭に描いてください。正方形の面積は1です。まず正方形を半分にしたタイルを(a)の位置に埋めます。続いて残った部分を半分にしたタイルを(b)の位置に埋めます。さらに残った部分を半分にしたタイルを(c)の部分に埋めます。この調子で(d), (e), (f), ... と徐々にタイルを埋め込んでいくと、もとの正方形の左下隅に残る空白を、徐々にしかも確実に埋めていきます。この埋め方をすればタイルが元の正方形からはみ出ることはありません。すなわちもとの正方形をタイルで埋め尽くしたところで、使うタイルの面積は合計で1です。これは

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

を表しますから、(1)の合計は確かに2(分)です。どうですか。アキレスと亀の話がわずか2分間の話である

ことを理解してもらえたでしょうか。

すると数学的帰納法とアキレスと亀の話はちょっと状況が違ってくるのが見えてきます。アキレスと亀の話では始めから2分間の話をしていただけで、ここまでなら論理と現実是一致的です。しかし現実には2分を超えたところにも存在するわけで、その部分にまでアキレスと亀の話当てはめてしまったことが混乱を招きました。

それに対して数学的帰納法はドミノ倒しの例を示したように、論理自体が無限の彼方まで続けられるものです。現実には無限の数のドミノを用意することはできませんが、私たちの思考の中に無限のドミノの列は存在しています。無限に続く列に無限の彼方まで続く論理を用意していることが数学的帰納法の特徴です。無限に続く時間に有限の論理を適用したアキレスと亀の論理とは一線を画しています。