◆連分数は 2 枚の鏡が作る像◆

2 次方程式

$$x^2 = x + 1 \tag{1}$$

を考えます。(1) に $x = 0$ を代入しても等式を満たさないので、$x = 0$ は (1) の解ではありません。したがって両辺を x で割って

$$x = 1 + \frac{1}{x} \tag{2}$$

とすることができます。(2) をただの等式と見ればそれまでの話ですが、これを、左辺の x を求めるために、わざわざ右辺に x を代入している、と見れば別の世界が開けてくるのです。

ややこしい話ですけれど、(2) の $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ を (2) の右辺の x に代入してみましょう。

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

となるはずです。右辺にはまだ x が存在するので、再び $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ を右辺にある x に代入すると

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

となります。右辺にはまだ x が存在するので$\ldots$。

これではきりがありませんね。なにしろこの操作は無限に続けることができるからです。そして無限に続けることで

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \tag{3}$$

となるでしょう。

このように、分数の中に分数が幾重にも重なる分数を「連分数」と呼びます。分数の中にそれ自身と同じ分数が幾重にも重なっていく様子は、向かい合わせた 2 枚の鏡をのぞいたとき、どこまでも鏡が映っていくのに似ています。連分数は一般に

$$a = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cdots}}}$$

で表しますが、これでは紙面を使い過ぎるので

$$a = q_1 + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \cdots$$

や[*1]

$$a = [q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \cdots] \tag{4}$$

で表すことが多いものです。特に (4) の記述ができるのは、連分数の各分子が常に 1 であるからですが、このことについては後で述べます。

ところで (3) に戻れば、x の解が連分数で求められたことになります。しかし、x は単に (1) を 2 次方程式の解の公式で求めるだけなので、$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であることはすぐにわかります。つまり

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\cdots$$

なのです。右辺の連分数には 1 以外の数がありません。そのためこれは、連分数の中でも特別な連分数であると言えるでしょう。実は、連分数が表す $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は「黄金比」と呼ばれる数で、昔から大変美しい数であるとされてきた数なのです。

ここで、$x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ のほうはどうなったか気になる人がいるでしょう。連分数には $+1$ しか使われていないので明らかに正です。一方、$x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ ですから、ここで求めた連分数は $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ではありません。不思議ですね。(1) を 2 次方程式の解の公式で求めれば 2 つの解がでるのに、それと同値であるはずの (2) から作った連分数からはひとつの解しか得られていません。なぜでしょう。

それには理由があります。実は (2) において、右辺の分母にある x について $x = \cdots$ と書き直せば

$$x = \frac{1}{-1+x}$$

になります。そして、ここに次々と x を代入すると

$$x = \frac{1}{-1+}\,\frac{1}{-1+}\,\frac{1}{-1+}\cdots$$

となって、これが $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ になるのです。

別の例を示します。もし最初に与えられた 2 次方程式が $x^2 = 5x - 2$ であれば、$x = 5 - \dfrac{2}{x}$ を繰り返し代入することで

$$x = 5 - \frac{2}{5-}\,\frac{2}{5-}\,\frac{2}{5-}\cdots$$

を得ます。これは解の公式から求められる 2 つの解のうち、$\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のほうにあたります。でも、この連分数は各分子が 1 ではないですね。どうすれば各分子が 1 になるのでしょうか。

各分子が 1 である連分数は、比較的簡単に作ることができます。ある数 a が小数で表して

$$a = q_1 + 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$$

[*1] $+$ が低い位置に書かれていることに注意してください。

となったとしましょう。これは

$$a = q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots}}$$

と書き直すことができます。このとき $\dfrac{1}{0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots}$ は必ず 1 より大きい値の小数になります。そこで、整数部分を q_2 として分離し、$\dfrac{1}{0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots} = q_2 + 0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$ と書くことにすると

$$a = q_1 + \frac{1}{q_2 + 0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots}$$

ですが、これは

$$a = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots}}}$$

と書き直せます。すると、また同じ理屈で

$$a = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots}}}}$$

になっていきます。この繰り返しで $q_1, q_2, q_3, \ldots > 0$ なる整数だけで連分数を作れるのです。

ここで $\dfrac{1}{0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots}$ のような、無限小数の逆数をどうやって求めるか疑問に思うかも知れません。相手にもよりますが、無限小数が $a + b\sqrt{n}$（a, b, n は有理数）の無理数なら簡単なものです。$\sqrt{2}$ を例にとって説明しましょう。

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} \tag{5}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} \tag{6}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}}\ . \tag{7}$$

(5) の分母の分母を有理化したのが (6) です。(7) で再び同じ形がでますから、以下、同じことの繰り返しです。これで $\sqrt{2}$ の連分数が求められるのです。結果は

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

です。$\sqrt{2}$ 以外の数でも、有理化できる数であれば連分数にすることは容易です[*2]。

もし、いろいろな数を連分数にする試みを続けると、使われる数は圧倒的に 1 や 2 のような数が多いことに気づくでしょう。100 や 200 のような大きな数は現れないのでしょうか。実は、大きな数も現れるけれど「確率的に」低い頻度で現れることになります。それはこういうことです。

$\dfrac{1}{0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots}$ の分数を $q_2 + 0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$ の小数に直すと $q_2 \geq 1$ ですが、q_2 の値は $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ の大きさに依存しているのです。例えば $\dfrac{1}{0.9}$、$\dfrac{1}{0.8}$、$\dfrac{1}{0.7}$、$\dfrac{1}{0.6}$ はすべて $1.\cdots$ なる小数ですが、これと同じ有効桁を分母にもつ分数で、$3.\cdots$ なる小数になるのは $\dfrac{1}{0.3}$ だけです。別の言い方をすれば

$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$	$1.0 > \cdot > 0.5$	$0.5 \geq \cdot > 0.333\cdots$	$0.333\cdots \geq \cdot > 0.25$	$0.25 \geq \cdot > 0.2$	$\cdots$
q_2	1	2	3	4	$\cdots$

のように、q_2 が大きいほど $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ がとれる範囲が狭まっていきます。連分数に現れる q_k は、必ずしも確率統計的な分布に従うわけではありませんが、100 や 200 が現れることは珍しい部類に入るのです。

[*2] $a + b\sqrt{n}$ の無理数は連分数にできるのはもちろん、$q_1, q_2, q_3, \ldots$ が循環することが知られています。また、有理数は有限の連分数になります。