

◆ $a \neq 0$ って鬱陶しくない? ◆

「 $a \neq 0$ 」の話題を始める以前に、タイトルがうっとうしいと感じたとしたら申し訳ありません。さて、そんなことより $a \neq 0$ を考えましょう。

$a \neq 0$ が何となく邪魔臭いと感じ始めるのは、おそらく 2 次関数や 2 次方程式において

$$\text{2 次関数} \quad y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$\text{2 次方程式} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

のような記述を見るときでしょう。

たしかに $a \neq 0$ がなければ、場合によっては $a = 0$ としてしまうことがあるかもしれません。そして $a = 0$ ということになれば、これらの式は

$$y = bx + c$$

$$bx + c = 0$$

となって、2 次関数でも 2 次方程式でもなくなってしまいます。とくに正確さを重視する教科書にとっては、そのような曖昧な表現は避けなければならないわけですから、安全のため、いちいち $a \neq 0$ という断りを入れることも仕方ない気がします。でも、真相は違うのです。

教科書などでは、おそらく「 $y = ax^2 + bx + c$ を 2 次関数という」とか「 $ax^2 + bx + c = 0$ を 2 次方程式という」などの定義が書かれているでしょう。そして、「ただし $a \neq 0$ とする」のような追加文を見つけると「ああ、念押しをしてるんだな」と思うかもしれません。

でも実は、それは定義の念押しではないのです。なぜなら 2 次関数や 2 次方程式の定義は

$$x \text{ についての 2 次関数} \quad y = ax^2 + bx + c$$

$$x \text{ についての 2 次方程式} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

であって、 $a \neq 0$ は定義に含める必要がないからです。ということは、 $a = 0$ でもいいんですか？ だったら、 $a = 0$ のときは「 $y = bx + c$ を 2 次関数という」となってしまい、変なことにならないのですか？ こんな疑問が聞こえてきそうです。でも、そうならないのです。 $a \neq 0$ を追加しているのは、たとえば教科書などにおいては、その後の記述の都合があるからです。

教科書というものは、話が順序よく展開していくものです。順序ということなら、2 次関数や 2 次方程式以前に「2 次式」にお目にかかっていたことに気づくはずですが。そのときは、まず次数が定義されました。次数とは

掛けられている文字（変数）の個数

のことです。したがって文字を変数と見た場合、

$$x^3, \quad abc, \quad ax^2, \quad 3x^2y, \quad -\frac{3}{2}axy$$

などはすべて3次であるといえます。

さて、 x^3 、 x^2 、 x はそれぞれ3次、2次、1次ですが、それでは

$$x^3 + x^2 + x$$

は何次の式かという、これは「変数 x について3次の式」と定義されます。なぜなら、多項式においては

各項のもっとも高い次数を、その多項式の次数とする

と決めたからです。そのため

$$x \text{ を変数とする } 2 \text{ 次式 } ax^2 + bx + c$$

という表現は、定義に照らしてまったく正しいものです。この場合、 a は定数です。

もし、ここで $a = 0$ であったなら、 $ax^2 + bx + c$ は実際 $bx + c$ という1次式になってしまいますが、このときの思考順序は

$$ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad a = 0 \quad \rightarrow \quad bx + c \tag{1}$$

であって

$$a = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad bx + c \tag{2}$$

ではないことに注意してください。

いずれの思考順序でも、結局は $bx + c$ になるのですが、(1) と (2) には大きな違いがあります。(1) は $ax^2 + bx + c$ から始めているので、まず2次式 $ax^2 + bx + c$ が定義されたことになります。

一方で、(2) は $a = 0$ から始めているので、この時点では2次式は定義されていません。それでも続けて $ax^2 + bx + c$ を考えれば、2次式を定義したことになると思うかもしれませんが、そうではないのです。なぜなら、すでに $a = 0$ を定義しているので、 $ax^2 + bx + c$ は同時に $bx + c$ でもあるのです。つまり、 $ax^2 + bx + c$ は定義される前に $bx + c$ に変わっているのです。その点で (2) は

$$a = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 + bx + c = bx + c$$

と書く方が正確でしょう。

このことから、2次式 $ax^2 + bx + c$ と言ったときは、それは間違いなく2次式なのであって、その後 a の値によって x^2 の項が消えるかどうかは関係ありません。したがって2次関数や2次方程式を考える場合には

$$2 \text{ 次関数} \quad y = ax^2 + bx + c$$

$$2 \text{ 次方程式} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

で十分なのです。なぜならそれらは、 a に関係なく「2次式の関数」であり「2次式の方程式」だからです。 $a \neq 0$ は、 x^2 の項を残すために追加しているわけではありません。

それでは、あえて $a \neq 0$ を書き加えている都合とは何でしょうか。

まず、2次関数から解明しましょう。 $a \neq 0$ を必要とする理由は、2次関数を定義した後でグラフを考える際、

2次関数のグラフは、 $a > 0$ のときは下に凸の、 $a < 0$ のときは上に凸の、放物線である

と言いたいからです。要するに2次関数のグラフは放物線であってほしいのです。

別に $a \neq 0$ がなくても、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは

$a > 0$ のときは下に凸の、 $a < 0$ のときは上に凸の放物線で、 $a = 0$ のときは直線である

と言えば済むことで、数学的にはまったく問題はありません。しかし「2次関数のグラフは放物線または直線である」と言うより、「2次関数のグラフは放物線である」と言い切るほうが簡潔であることに異論はないでしょう。

2次方程式についても同様です。 $a \neq 0$ を必要とする理由は、2次方程式を定義した後で方程式を解く際、

$$2次方程式の解は、 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ である$$

と言いたいからです。要するに $a = 0$ を認めると、分母が0になることがあるからです。

別に $a \neq 0$ がなくても、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \neq 0 \text{ のときは} & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ a = 0 \text{ で } b \neq 0 \text{ のときは} & x = -\frac{c}{b} \\ a = b = 0 \text{ ならば、} & c \neq 0 \text{ のときは解なし、} \\ & c = 0 \text{ のときはすべての実数} \end{array} \right.$$

と言えば済むことで、数学的にはまったく問題はありません。しかし、解の公式として扱いやすいのは、前者であることに異論はないでしょう。

結局のところ、一見うとうしい $a \neq 0$ ではあるけれど、 $a \neq 0$ を付け加えない方が、後からよっぽとうとうしい目に遭ってしまうからなのです。