◆ $a \neq 0$ って鬱陶しくない？◆

「$a \neq 0$」の話題を始める以前に、タイトルがうっとうしいと感じたとしたら申し訳ありません。さて、そんなことより $a \neq 0$ を考えましょう。

$a \neq 0$ が何となく邪魔臭いと感じ始めるのは、おそらく 2 次関数や 2 次方程式において

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ 次関数 } y = ax^2 + bx + c & (a \neq 0) \\ 2 \text{ 次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 & (a \neq 0) \end{array}$$

のような記述を見るときでしょう。

たしかに $a \neq 0$ がなければ、場合によっては $a = 0$ としてしまうことがあるかもしれません。そして $a = 0$ ということになれば、これらの式は

$$\begin{array}{l} y = bx + c \\ bx + c = 0 \end{array}$$

となって、2 次関数でも 2 次方程式でもなくなってしまいます。とくに正確さを重視する教科書にとっては、そのような曖昧な表現は避けなければならないわけですから、安全のため、いちいち $a \neq 0$ という断りを入れることも仕方ない気もします。でも、真相は違うのです。

教科書などでは、おそらく「$y = ax^2 + bx + c$ を 2 次関数という」とか「$ax^2 + bx + c = 0$ を 2 次方程式という」などの定義が書かれているでしょう。そして、「ただし $a \neq 0$ とする」のような追加文を見つけると「ああ、念押しをしてるんだな」と思うかもしれません。

でも実は、それは定義の念押しではないのです。なぜなら 2 次関数や 2 次方程式の定義は

$$\begin{array}{l} x \text{ についての 2 次関数 } y = ax^2 + bx + c \\ x \text{ についての 2 次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \end{array}$$

であって、$a \neq 0$ は定義に含める必要がないからです。ということは、$a = 0$ でもいいんですか？　だったら、$a = 0$ のときは「$y = bx + c$ を 2 次関数という」となってしまい、変なことにならないのですか？　こんな疑問が聞こえてきそうです。でも、そうならないのです。$a \neq 0$ を追加しているのは、たとえば教科書などにおいては、その後の記述の都合があるからです。

教科書というものは、話が順序よく展開していくものです。順序ということなら、2 次関数や 2 次方程式以前に「2 次式」にお目にかかっていたことに気づくはずです。そのときは、まず**次数**が定義されました。次数とは

掛けられている文字（変数）の個数

のことです。したがって文字を変数と見た場合、

$$x^3, \quad abc, \quad ax^2, \quad 3x^2y, \quad -\frac{3}{2}axy$$

などはすべて 3 次であるといえます。

さて、x^3、x^2、x はそれぞれ 3 次、2 次、1 次ですが、それでは

$$x^3 + x^2 + x$$

は何次の式かというと、これは「変数 x について 3 次の式」と定義されます。なぜなら、多項式においては

各項のもっとも高い次数を、その多項式の次数とする

と決めたからです。そのため

$$x \text{ を変数とする 2 次式 } ax^2 + bx + c$$

という表現は、定義に照らしてまったく正しいものです。この場合、a は定数です。

もし、ここで $a = 0$ であったなら、$ax^2 + bx + c$ は実際 $bx + c$ という 1 次式になってしまいますが、このときの思考順序は

$$ax^2 + bx + c \quad \to \quad a = 0 \quad \to \quad bx + c \tag{1}$$

であって

$$a = 0 \quad \to \quad ax^2 + bx + c \quad \to \quad bx + c \tag{2}$$

ではないことに注意してください。

いずれの思考順序でも、結局は $bx + c$ になるのですが、(1) と (2) には大きな違いがあります。(1) は $ax^2 + bx + c$ から始めているので、まず 2 次式 $ax^2 + bx + c$ が定義されたことになります。

一方で、(2) は $a = 0$ から始めているので、この時点では 2 次式は定義されていません。それでも続けて $ax^2 + bx + c$ を考えれば、2 次式を定義したことになると思うかもしれませんが、そうではないのです。なぜなら、すでに $a = 0$ を定義しているので、$ax^2 + bx + c$ は同時に $bx + c$ でもあるのです。つまり、$ax^2 + bx + c$ は定義される前に $bx + c$ に変っているのです。その点で (2) は

$$a = 0 \quad \to \quad ax^2 + bx + c \ = \ bx + c$$

と書くほうが正確でしょう。

このことから、2 次式 $ax^2 + bx + c$ と言ったときは、それは間違いなく 2 次式なのであって、その後 a の値によって x^2 の項が消えるかどうかは関係ありません。したがって 2 次関数や 2 次方程式を考える場合には

$$\text{2 次関数 } y = ax^2 + bx + c$$
$$\text{2 次方程式 } ax^2 + bx + c = 0$$

で十分なのです。なぜならそれらは、a に関係なく「2 次式の関数」であり「2 次式の方程式」だからです。$a \neq 0$ は、x^2 の項を残すために追加しているのではありません。

それでは、あえて $a \neq 0$ を書き加えている都合とは何でしょうか。

まず、2 次関数から解明しましょう。$a \neq 0$ を必要とする理由は、2 次関数を定義した後でグラフを考える際、

2 次関数のグラフは、$a > 0$ のときは下に凸の、$a < 0$ のときは上に凸の、放物線である

と言いたいからです。要するに 2 次関数のグラフは放物線であってほしいのです。

別に $a \neq 0$ がなくても、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは

$a > 0$ のときは下に凸の、$a < 0$ のときは上に凸の放物線で、$a = 0$ のときは直線である

と言えば済むことで、数学的にはまったく問題はありません。しかし「2 次関数のグラフは放物線または直線である」と言うより、「2 次関数のグラフは放物線である」と言い切るほうが簡潔であることに異論はないでしょう。

2 次方程式についても同様です。$a \neq 0$ を必要とする理由は、2 次方程式を定義した後で方程式を解く際、

$$2\text{ 次方程式の解は、}x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\text{である}$$

と言いたいからです。要するに $a = 0$ を認めると、分母が 0 になることがあるからです。

別に $a \neq 0$ がなくても、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\begin{cases} a \neq 0\text{ のときは} & x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ a = 0\text{ で }b \neq 0\text{ のときは} & x = -\dfrac{c}{b} \\ a = b = 0\text{ ならば、} & c \neq 0\text{ のときは解なし、} \\ & c = 0\text{ のときはすべての実数} \end{cases}$$

と言えば済むことで、数学的にはまったく問題はありません。しかし、解の公式として扱いやすいのは、前者であることに異論はないでしょう。

結局のところ、一見うっとうしい $a \neq 0$ ではあるけれど、$a \neq 0$ を付け加えないほうが、後からよっぽどうっとうしい目に遭ってしまうからなのです。