◆ (負) × (負) = (正) である単純でも奥が深い理由◆

『どうして (負) × (負) = (正) になるのですか』と質問されたとします。すると私の答えはこうです。『そんなばかげた質問には答えられないよ』。

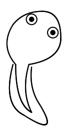
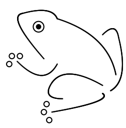
失礼な奴だと思わないでください。順を追って説明しましょう。でも、その前に私から質問をさせてください。質問はこうです。『次の二つの文章のうち、一方の文章は正しくてもう一方は間違っているとしたら、どちらが正しい文章ですか？』。

おたまじゃくしはかえる**になる**　(A)
おたまじゃくしはかえる**である**　(B)

文末が少しだけ違います。どちらも同じじゃないかと思ってはいけません。はっきりとした違いがあるのですから。結論を言いますと (A) が正しい文章です。一方、(B) は間違った文章です。というのは (A) は正しいことが説明できます。証明できると言ってもよいでしょう。

証明のしかたはこうです。どこかに行っておたまじゃくしを何匹か捕まえてきてください。そしてそれらをしばらく観察してみましょう。ほらね、足がはえてきて手がはえてきてかえるになったでしょう。つまり、おたまじゃくしはかえる**になる**のです。

でも (B) は間違っています。その説明はこうです。まず左図のような雰囲気の生き物を私たちは『おたまじゃくし』と呼んでいます。一方、右図のような雰囲気の生き物を私たちは『かえる』と呼んでいます。

だから『おたまじゃくし』はおたまじゃくしであって、『かえる』はかえるなんです。おたまじゃくしがかえる**である**わけはないのです。つまり、これは私たちの約束ごとなんです。このことを頭に入れて次の質問に答えてください。『次の二つの文章のうち、一方の文章は正しくてもう一方は間違っているとしたら、どちらが正しい文章ですか？』。

(負) × (負) = (正) **になる**　(A′)
(負) × (負) = (正) **である**　(B′)

どちらが正しいか予想がつきましたか。私がはじめに『そんなばかげた質問には答えられないよ』と言ったことを思い出してください。そのときの質問は (A′) でした。つまりこれがばかげた質問、すなわち間違っている方です。正しいのは (B′) です。

要するに (負) × (負) はあれこれやった挙げ句 (正) になったのではありません。これは私たちの約束ごとと

して「(負) $\times$ (負) $=$ (正) である」と決めたのです。そう、これは約束なのです。だからどのようにすると (負) $\times$ (負) $=$ (正) になるのかと考えても無駄なのです[*1]。

すると当然、次の疑問がわくでしょう。なぜ (負) $\times$ (負) $=$ (正) と決めたのでしょうか。約束ごとなら (負) $\times$ (負) $=$ (負) と決めてもよさそうなものです。しかしこの約束こそ単純な理由からなんです。

掛け算を考えます。5×3 を例にとりましょう。答は 15 ですが、この場合の掛け算の記号 "$\times$" は 5 を 3"回足しなさい" という意味で使われています。「掛け算」と呼ばれる計算と「足し算」と呼ばれる計算は本質的に同じ計算なのです。記号 $\times$ は同じ数を繰り返し足すときに使われる記号で、この繰り返しの足し算を掛け算と呼びます。私たちは計算の効率化のために「九九」を覚えて掛け算をしているのです。

さて

$$5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$$

です。であれば $(-5) \times 3$ の計算は、(-5) を 3 回足す計算ですから

$$(-5) \times 3 = (-5) + (-5) + (-5) = -15$$

のようにして -15 と求めます。負の数を使っても、掛け算はきちんとできるのですね。

今度は $5 \times (-3)$ の計算を考えましょう。これは負の数を掛ける計算ですが、ちょっと困ったことになっています。さっきの計算の意味からすると、この計算は「5 を (-3) 回足しなさい」ということです。だいたい、何回足すといえば、そこには正の数を使うのが当然なのに、負の数が使われています。現実には (-3) 回足すことなどできないので、こんな計算はできません。それでもこの計算の答を求める必要があるなら、それは日常使う計算から離れて、純粋に数学の中で計算をすることになるでしょう。つまり、ここから先は数学の約束ごとになるのです。

$5 \times (-3)$ の答は、できれば -15 になってほしいところです。なぜなら

$$(-3) \times 5 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$$

であるので、それを逆にした $5 \times (-3)$ も同じ結果であってほしいからです。つまり交換法則は成り立ってほしいのです。そこで、$5 \times \square$ の□を 3, 2, 1, 0 と 1 ずつ減らして考えましょう。すると

$$\begin{array}{rcr} & \vdots & \\ 5 \times \boxed{3} & = & 15 \\ 5 \times \boxed{2} & = & 10 \\ 5 \times \boxed{1} & = & 5 \\ 5 \times \boxed{0} & = & 0 \\ & \vdots & \end{array}$$

[*1] 矛盾するようで恐縮ですが、「数の真実の姿」の章には、どのようにして (負) $\times$ (負) $=$ (正) になるかを説明してあります。

のように、答は 5 ずつ減っていきます。もしこのペースで $5 \times \square$ の□を $-1, -2, -3, \ldots$ と 1 ずつ減らせば、答も 5 ずつ減るのがもっとも自然な流れでしょう。自然な流れにしたがえば

$$\begin{array}{rcr} & \vdots & \\ 5 \times \boxed{-1} & = & -5 \\ 5 \times \boxed{-2} & = & -10 \\ 5 \times \boxed{-3} & = & -15 \\ & \vdots & \end{array}$$

となりますから、$5 \times (-3) = -15$ とすることに異論はないと思います。

　そこで、これをさらに拡大解釈して

$$\begin{array}{rcrl} & \vdots & & \\ (-5) \times 3 & = & -15 & \\ (-5) \times 2 & = & -10 & \\ (-5) \times 1 & = & -5 & \\ (-5) \times 0 & = & 0 & \text{の続きの計算を} \\ & & & \\ (-5) \times (-1) & = & 5 & \\ (-5) \times (-2) & = & 10 & \\ (-5) \times (-3) & = & 15 & \\ & \vdots & & \end{array}$$

のように考えれば、(負) $\times$ (負) $=$ (正) と決めるのが自然でしょう。そうすれば、結局掛け算に関しては、普段の掛け算のルールに符号のルールを付け加えるだけで済みます。しかしこう決めたことで、この先思いもよらない奥深さが見えてくるのです。（$\Rightarrow$ 続きは「第 3 の符号」にて。）