

◆ $(-7) \div 3$ 、余りはいくつ? ◆

$7 \div 3$ の計算を整数の範囲ですれば「 $7 \div 3 = 2$ 、余り 1」とします*1。それなら $(-7) \div 3$ ではどうでしょう? 割られる数が 7 から -7 になったので「 $(-7) \div 3 = -2$ 、余り -1 」とするのが妥当でしょうか。この例を実生活の中から探すと次のようなものが当てはまります。7 万円の品物を買うとき 3 回の分割払いにしたとします。この時点では品物を先に受け取るので、実質的に借金をしたことになるでしょう。借金を意味するために -7 を使います。1 回につき払う 万円未満の端数は、この場でまとめて頭金として払うことにします。頭金が余りに相当しています。すると、一回あたり 2 万円の分割返済にして、今は 1 万円を置いていけばよいことになります。これが

$$(-7) \div 3 = -2, \text{ 余り } -1$$

で表される式の内容です。

実用にはこれでよいのですが、ここで終わってしまったのは話題にした意味がありません。私は別の見解もっています。私の見解は

$$(-7) \div 3 = -3, \text{ 余り } 2 \tag{1}$$

です。このような結果になったことについて話しましょう。

まず

$$A \div B = C, \text{ 余り } R \tag{2}$$

は普通 $A, C, R \geq 0, B > 0$ の条件下で行われる計算です。しかも余り R は割る数 B より小さくなくてはなりません。つまり「 $7 \div 3 = 2$ 、余り 1」であって、「 $7 \div 3 = 1$ 、余り 4」のようなことはないのです。すると (2) は

$$A = BC + R, \quad (0 \leq R < B) \tag{3}$$

と同値です。(3) を見る限り A や C が負の数であってもかまわないような印象を受けます。それなら (3) を $A, C < 0$ の範囲にまで拡張してもよさそうです。

$A, C < 0$ の範囲にまで拡張したといっても $(0 \leq R < B)$ は変わりありませんから、 $(-7) \div 3$ の計算は (1) とするのがよいでしょう。

このことをもう少し詳しく考察してみます。

*1 等号「=」はあくまでも左辺と右辺が等しいときに使うもので、このような使い方は好ましくありません。しかし私たちの習慣として、この章ではこのままにしておきます。実際プログラム言語では「 $2 = 7/3$ 」となることがあるので、こだわりすぎても仕方ありません。

$7 \div 3$ と $(-7) \div 3$ の違いを一般的な見方を含めて考えるために

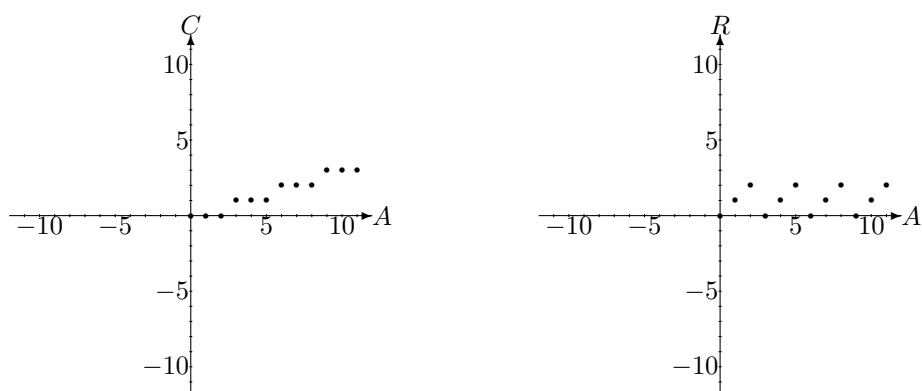
$$A \div 3 = C, \text{ 余り } R$$

を A の値を変化させて探ることにします。 A の値がひとつ決まれば自動的に C と R は決まります。しかし A の変化に対して C と R の変化をすべて一緒に扱うのはつらいので、ひと組ずつの変化を観察してみます。

「 A と C の関係」と「 A と R の関係」をそれぞれ見ましょう。

A (割られる数)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
C (商)	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	...
R (余り)	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...

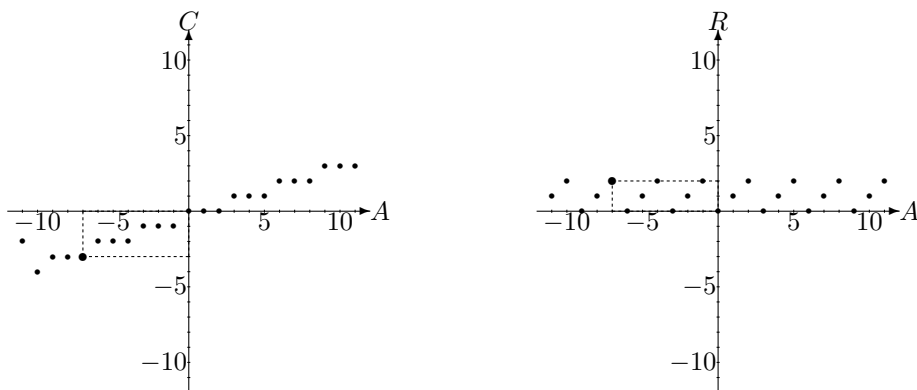
表には A 、 C 、 R の変化が同時に書いてあります。そのうち「 A と C の関係」と「 A と R の関係」をグラフに表したのが次の図です。



グラフは正の数における割り算の関係を私たちに見せてくれます。 A と C の関係はどことなく比例関係に近いように見えます。また、 A と R の関係は常に R が 0 と 2 の間にあるように見えます。そう考えると $A < 0$ の部分までグラフがあるとすれば、それぞれ次に示す図のようになっていると考えるのが自然かもしれません。 $A < 0$ の部分を描き入れた図のそれぞれから、 A が -7 のときの C と R を調べるとそれぞれ $C = -3$ 、 $R = 2$ であることが見てとれます。このことから

$$(-7) \div 3 = -3, \text{ 余り } 2$$

としたいものです。



では、話のついでに $7 \div (-3)$ だったら商と余りをどう考えましょう。もうこの域になると、計算式を日常の中に見つけることは不可能です。せいぜい「どのように考えたらつじつまが合うか」という話になるものと思われます。

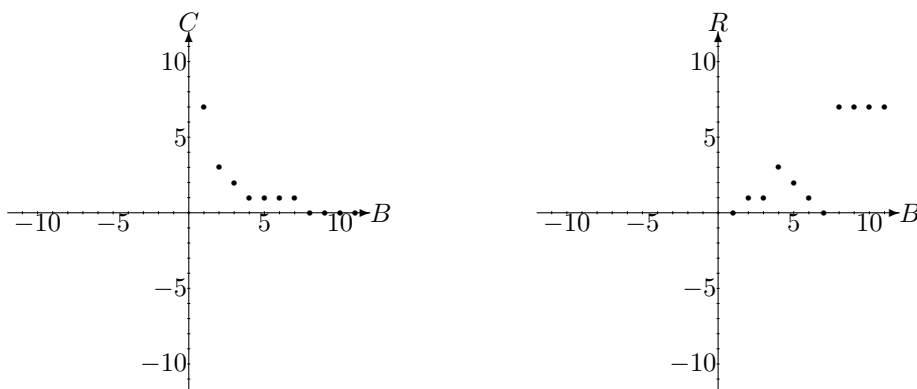
$A \div B$ において割る数 B の変化と、そのときの商と余りを追跡するために

$$7 \div B = C, \text{ 余り } R$$

を例にとって考えます。これもさつき同様に「 B と C の関係」と「 B と R の関係」をそれぞれ見ましょう。

B (割る数)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
C (商)	7	3	2	1	1	1	1	0	0	0	...
R (余り)	0	1	1	3	2	1	0	7	7	7	...

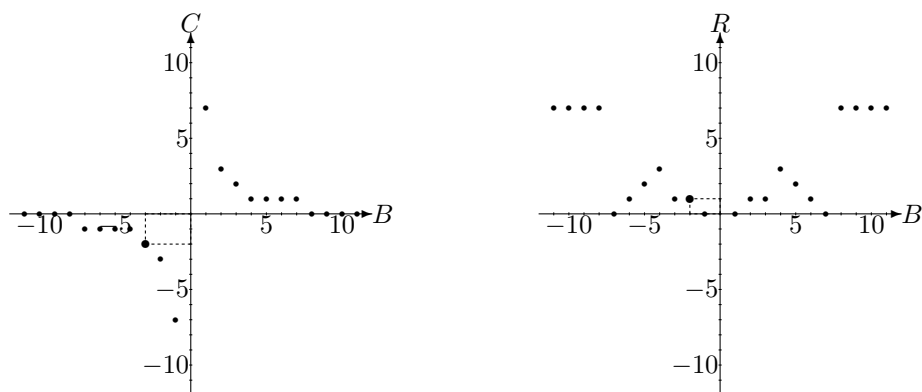
表を見る限り際立った規則があるようには見えませんが、 $B > 7$ の先は常に $C = 0, R = 7$ になります。割られる数 7 より割る数 B が大きくなるので商が 0 となるのは当然です。とりあえずここまでの関係をグラフ化しておきましょう。



このグラフの振る舞いから $B < 0$ の部分を想像したいのですが、このままでは決め手に欠けるような気がします。しかし B と C の関係のグラフからは、反比例のグラフに似た規則が見られます。そうすると $B < 0$

の部分は $B > 0$ の部分を上下反転させたものになると考えられます。

その決め手となるのは $7 \div (-1)$ や $7 \div (-7)$ のような余り 0 の割り算です。この計算はあれこれ悩むことなく C の値が -7 や -1 と定まります。それ以外の商 C もこのように定めれば、 $B < 0$ における部分は $B > 0$ における部分の延長とみられるでしょう。すると余り R は自動的に決まりますから、その結果は次の図のようになるはずです。うまいことに余り R は $R \geq 0$ になりました。



グラフから $7 \div (-3)$ に相当する $B = -3$ を読み取ると

$$7 \div (-3) = -2, \text{ 余り } 1$$

であることがわかります。

以上のようにすればつじつまが合いそうですが、たったひとつ不具合が生じました。それは余り R は $(0 \leq R < B)$ としてきましたが、 $B < 0$ の割り算ではこの不等号の関係がおかしくなります。そこで R の条件については $(0 \leq R < |B|)$ としておけば混乱をきたすことはないはずです。

そしてこの余り R の条件を守ることで $(-7) \div (-3)$ の計算もできるようになります。 $(0 \leq R < |-3|)$ の条件に注意すれば

$$(-7) \div (-3) = 3, \text{ 余り } 2$$

です。

しかし日常感覚では「 $(-7) \div 3 = -2$ 、余り -1 」に軍配をあげてことを否定しませんし、プログラム言語やソフトウェアでも解釈（仕様）はまちまちのようです。