◆ $(-7) \div 3$、余りはいくつ？◆

$7 \div 3$ の計算を整数の範囲ですれば「$7 \div 3 = 2$、余り 1」とします*1 。それなら $(-7) \div 3$ ではどうでしょう？　割られる数が 7 から -7 になったので「$(-7) \div 3 = -2$、余り -1」とするのが妥当でしょうか。この例を実生活の中から探すと次のようなものが当てはまります。7 万円の品物を買うとき 3 回の分割払いにしたとします。この時点では品物を先に受け取るので、実質的に借金をしたことになるでしょう。借金を意味するために -7 を使います。一回につき払う 1 万円未満の端数は、この場でまとめて頭金として払うことにします。頭金が余りに相当しています。すると、一回あたり 2 万円の分割返済にして、いまは 1 万円を置いていけばよいことになります。これが

$$(-7) \div 3 = -2、\quad 余り\ -1$$

で表される式の内容です。

実用にはこれでよいのでしょうが、ここで終ってしまっては話題にした意味がありません。私は別の見解をもっています。私の見解は

$$(-7) \div 3 = -3、\quad 余り\ 2 \tag{1}$$

です。このような結果になったことについて話しましょう。

まず

$$A \div B = C、\quad 余り\ R \tag{2}$$

は普通 $A,\ C,\ R \geq 0,\ B > 0$ の条件下で行われる計算です。しかも余り R は割る数 B より小さくなくてはなりません。つまり「$7 \div 3 = 2$、余り 1」であって、「$7 \div 3 = 1$、余り 4」のようなことはないのです。すると (2) は

$$A = BC + R、\quad (0 \leq R < B) \tag{3}$$

と同値です。(3) を見る限り A や C が負の数であってもかまわないような印象を受けます。それなら (3) を $A,\ C < 0$ の範囲にまで拡張してもよさそうです。

$A,\ C < 0$ の範囲にまで拡張したといっても $(0 \leq R < B)$ は変わりありませんから、$(-7) \div 3$ の計算は (1) とするのがよいでしょう。

このことをもう少し詳しく考察してみます。

---

*1 等号 “=” はあくまでも左辺と右辺が等しいときに使うもので、このような使い方は好ましくありません。しかし私たちの習慣として、この章ではこのままにしておきます。実際プログラム言語では `7/3 = 2` となることがあるので、こだわりすぎても仕方ありません。

$7 \div 3$ と $(-7) \div 3$ の違いを一般的な見方を含めて考えるために

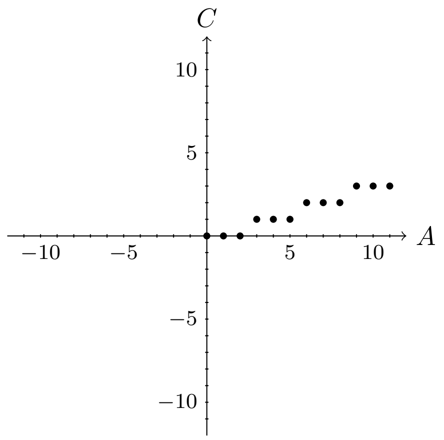
$$A \div 3 = C、\quad 余り\ R$$

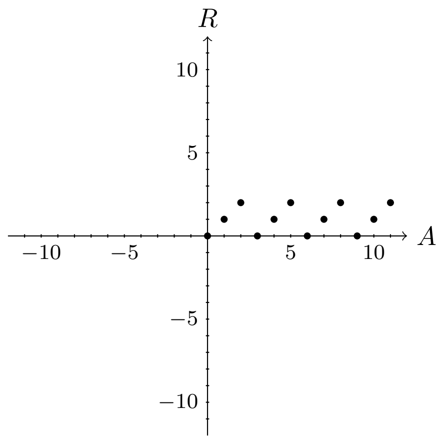
を A の値を変化させて探ることにします。A の値が一つ決まれば自動的に C と R は決まります。しかし A の変化に対して C と R の変化をすべて一緒に扱うのはつらいので、ひと組ずつの変化を観察してみます。

「A と C の関係」と「A と R の関係」をそれぞれ見ましょう。

A (割られる数)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
C (商)	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	...
R (余り)	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...

表には A、C、R の変化が同時に書いてあります。そのうち「A と C の関係」と「A と R の関係」をグラフに表したのが次の図です。



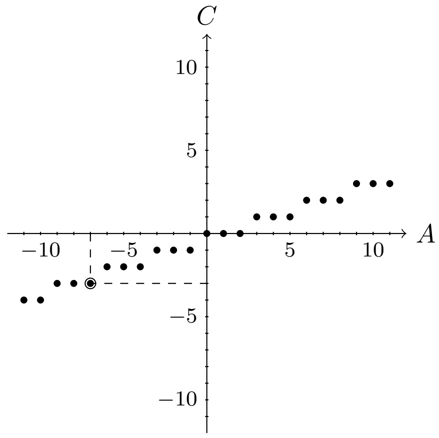


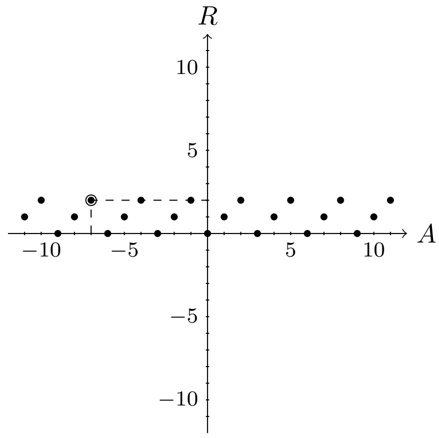
グラフは正の数における割り算の関係を私たちに見せてくれます。A と C の関係はどことなく比例関係に近いように見えます。また、A と R の関係は常に R が 0 と 2 の間にあるように見えます。

そう考えると $A < 0$ の部分までグラフがあるとすれば、それぞれ次ページに示す図のようになっていると考えるのが自然かもしれません。$A < 0$ の部分を描き入れた図のそれぞれから、A が -7 のときの C と R を調べるとそれぞれ $C = -3$, $R = 2$ であることが見てとれます（それぞれのグラフ中の◎)。このことからも

$$(-7) \div 3 = -3、\quad 余り\ 2$$

としたいものです。





では、話のついでに $7 \div (-3)$ だったら商と余りをどう考えましょう。もうこの域になると、計算式を日常の中に見つけることは不可能です。せいぜい「どのように考えたらつじつまが合うか」という話になるものと思われます。

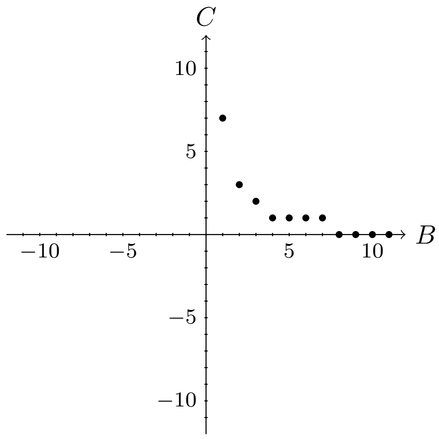
$A \div B$ において割る数 B の変化と、そのときの商と余りを追跡するために

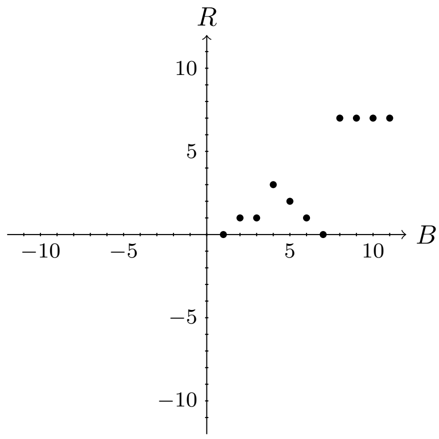
$$7 \div B = C\text{、 余り } R$$

を例にとって考えます。これもさっき同様に「B と C の関係」と「B と R の関係」をそれぞれ見ましょう。

B (割る数)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
C (商)	7	3	2	1	1	1	1	0	0	0	...
R (余り)	0	1	1	3	2	1	0	7	7	7	...

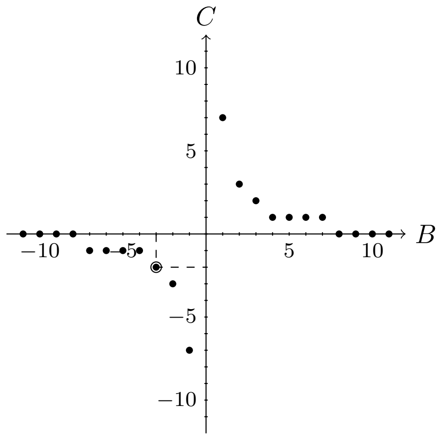
表を見る限り際立った規則があるようには見えませんが、$B > 7$ の先は常に $C = 0$, $R = 7$ になります。割られる数 7 より割る数 B が大きくなるので商が 0 となるのは当然です。とりあえずここまでの関係をグラフ化しておきましょう。

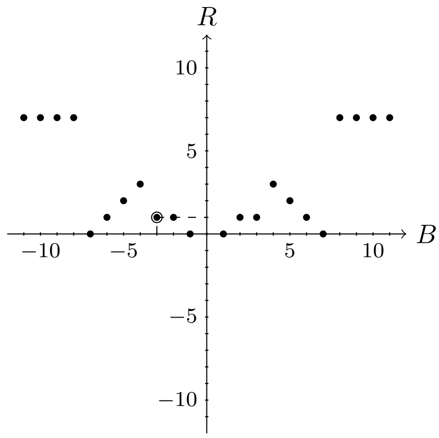




このグラフの振る舞いから $B < 0$ の部分を想像したいのですが、このままでは決め手に欠けるような気がします。しかし B と C の関係のグラフからは、反比例のグラフに似た規則が見られます。そうなると $B < 0$ の部分は $B > 0$ の部分を上下反転させたものになると考えられます。

その決め手となるのは $7 \div (-1)$ や $7 \div (-7)$ のような余り 0 の割り算です。この計算はあれこれ悩むことなく C の値が -7 や -1 と定まります。それ以外の商 C もこのように定めれば、$B < 0$ における部分は $B > 0$ における部分の延長とみられるでしょう。すると余り R は自動的に決まりますから、その結果は次の図のようになるはずです。うまいことに余り R は $R \geq 0$ になりました。





グラフから $7 \div (-3)$ に相当する $B = -3$ を読み取ると

$$7 \div (-3) = -2、\quad 余り\ 1$$

であることがわかります。

以上のようにすればつじつまが合いそうですが、たった一つ不具合が生じました。それは余り R は $(0 \leq R < B)$ としてきましたが、$B < 0$ の割り算ではこの不等号の関係がおかしくなります。そこで R の条件については $(0 \leq R < |B|)$ としておけば混乱をきたすことはないはずです。

そしてこの余り R の条件を守ることで $(-7) \div (-3)$ の計算もできるようになります。$(0 \leq R < |-3|)$ の条件に注意すれば

$$(-7) \div (-3) = 3、\quad 余り\ 2$$

です。

しかし日常感覚では「$(-7) \div 3 = -2$、余り -1」に軍配をあげることを否定しませんし、プログラム言語やソフトウェアでも解釈（仕様）はまちまちのようです。