

## ◆一対一対応は怪しげな関係◆

一対一の対応は、大変直感的でわかりやすいものです。6人の子どもがいて、ひとりひとりが帽子を持っていれば、子どもと帽子は一対一対応をしています。もし、帽子に名前が書いてあれば、Aという名の子どもはAと書かれた帽子を手にするでしょう。決して、Bと書かれた帽子を手にすることはありません。逆にCと書かれた帽子はCという名前の子どもの物ですから、決してDという子どもが手にすることもないでしょう。

つまり、子どもの中のどれかひとりを選べば、ただひとつの帽子を決定できるし、帽子の中からどれかひとつを選んでも、ただひとりの子どもを決定できます。一対一対応の本質はここにあります。

私たちは、小学校から自然な形で一対一対応に親しんでいます。低学年でものを数える作業は、ものと自然数との対応になっています。高学年で比例の学習をするときも、何々の何倍という言いかたをしています、もとの状態と何倍かしたあとの状態が対応しています。

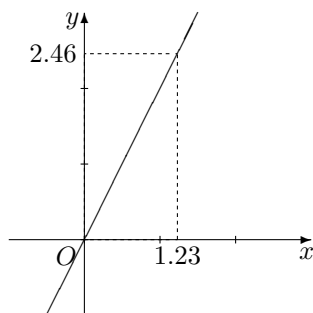
また、練習問題を解く場合は、大抵ひとつの答がでるものですが、これは一対一対応の問題を選んでいるからなのです。時速何 km で何時間進むと距離はどれだけですか？ 底辺と高さがそれぞれ何 cm である三角形の面積を求めなさい、などはきちんとした対応の上に成り立つ問題です。ですから、答もひとつだけなのです。

もし、3km 先の公園まで歩くと何時間かかりますか？とか、面積が何々  $\text{cm}^2$  の長方形の縦と横の長さはどれだけですか？などと質問されたら困ります。一対一対応ではないからです。

その点、比例は一対一対応の模範生です。簡単な例で  $y = 2x$  を考えましょう。大変おおまかな考えですが、

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	(1.23)	2	3	...
$y$	...	-6	-4	-2	0	2	(2.46)	4	6	...

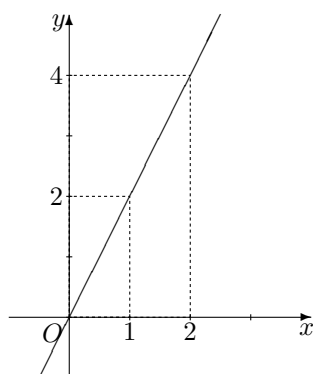
と対応表を作っておけば、整数間の半端な値も想像しやすいでしょう。そこから、 $x, y$  の関係がグラフ上に



と浮かび上がることも自然に理解できるはずですよ。

そして、表の対応からでもグラフからでも、たとえば  $x = 1.23$  に対してただひとつの  $y = 2.46$  が対応したり、また、 $y = \pi$  のような値でさえもただひとつの  $x = \frac{\pi}{2}$  が対応することがわかります。大変気持ちのよいものですね。

では同じグラフで、目を  $1 \leq x \leq 2$  に向けてみましょう。ここでは範囲を指定したわけですが、すると、 $x$  の範囲に対応して  $y$  の範囲が決まります。それは  $2 \leq y \leq 4$  です。 $x$  のあるひとつの区間に対して、 $y$  のあるひとつの区間が対応しているので、特別おかしいことはないと思うでしょう。でも、グラフをよく見てください。



$x$  の区間の長さは 1 なのに、 $y$  の区間は 2 の長さです。あれれ？ きちんと  $x$  軸上の点と  $y$  軸上の点は一対一対応をしていたはずですね。なのに、どうして長さが変わってしまうのでしょうか。

ひとつの考えとしては、点は隙間を空けて並んでいるというものです。隙間が開いていれば、 $x$  軸上での間隔と  $y$  軸上での間隔が違えば、完璧な一対一対応でも見た目の長さは変わってきます。でも、点と点の間に隙間はありません。それは次のようにして説明できます。

まず、点と点の間に隙間があるというのは、点と点の間に値がないと考えてよいでしょう。仮に  $x$  軸上の  $a$  と  $b$  の間に隙間があるとしてみます。しかし、 $a$  と  $b$  の間には自由に点を打つことができます。ひとつの例は  $\frac{a+b}{2}$  を作ることです。このことから任意の 2 点の間には、隙間なんてあり得ないことがわかります。つまり点はつながっているのです。ただ、数学では「(つながっている) = (連続)」ではないことを指摘しておきます。この微妙な考えは、目の前の疑問を解決してから話すことにしましょう。

点と点の間に隙間がないとすれば次に考えたいのは、点はつながっているが、ゴムのように伸び縮みが可能だということです。 $x$  軸上の区間が始めの状態、 $y$  軸上の区間が 1 秒後の状態です。ゴムは始めも 1 秒後も同じ物ですから、この感覚のほうが自然でしょうか。

でも、 $y = 2x$  の例は直線が伸びているわけではありません。今の例ではグラフの長さは  $\sqrt{5}$  ですが、直線上の点から  $x$  軸と  $y$  軸を同時に見れば、それぞれひとつの点しか対応していません。一対一対応であることは間違いありません。けれど  $\sqrt{5}$  から  $x$  軸を見れば長さ 1 に、 $y$  軸を見れば長さ 2 になっています。何か変で

すね。

混乱の原因は「対応」にあります。ここでの対応は、私たちが普段考えている対応とは根本が違うのです。

例えば“りんごが5つある”とは、各りんごに自然数 1, 2, 3, 4, 5 が一対一対応していると見ます。このとき、りんごの数（かず）は5に等しいと言います。普段はこんな見方をしませんが、数をかぞえるとはこういうことなのです。

では、同様の考えで偶数の数をかぞえてみましょう。りんごの例同様に、偶数に自然数をひとつづつあてがえばよいので、

偶数	2	4	6	8	10	...
	↓	↓	↓	↓	↓	...
自然数	1	2	3	4	5	...

のような対応になります。対応は無限の彼方へ向かって行きますが、もれなく対応がついていることに注意を払ってください。5つのりんごに自然数が1から5まで対応して、りんごの数と自然数の数が等しいとみなしたので、偶数と自然数がすべて対応していれば、やはり偶数と自然数は同じ数（かず）だけある、と考えるのがいいでしょう。このときに数（かず）ということばは適切でないように思えるので、「濃度」という用語を使いたいと思います。

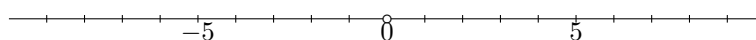
これを見ると、日常の感覚では偶数は自然数の半分しかないはずなのに、互いに一対一の対応がつく量と言えるのです。不思議な感覚ですね。

そして、濃度の感覚が先ほどの  $y = 2x$  の関係に当てはまります。 $x$  軸上の区間  $1 \leq x \leq 2$  と  $y$  軸上の区間  $2 \leq y \leq 4$  は等しい濃度です。自然数は偶数の2倍あるように見えても、等しい濃度であるがゆえに、一対一対応になります。同様に、区間  $2 \leq y \leq 4$  は区間  $1 \leq x \leq 2$  の2倍あるように見えても、等しい濃度であるがゆえに一対一対応になっているのです。何だかわかったような意味不明のような...

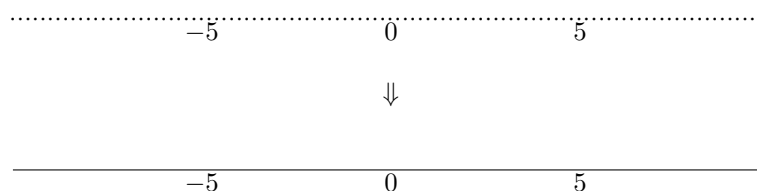
そう感じるのには仕方ありません。それは、直線自体が不思議な性質を持っているからです。

直線は無数の点によってつながっています。そして、ある視点のもとでは「連続」ですが、視点を変えればつながっていても連続ではない状態なのです。これまた意味不明ですね。順を追って説明しましょう。

まず、数直線は「連続」な直線です。連続とは切れ目がないということなのです。連続な直線に切れ目を入れるのは簡単です。任意の1点を抜けばよいからです。たとえば、数直線から点0を抜けば、直線は正の部分と負の部分に分けられます。



さて、今度は整数値の点をもとに直線を作ってみましょう。作り方はさっきの考えで、0と1の間に0.5、さらに0と0.5の間に0.25、またその間に0.125、...という具合にです。それでは中間部分にしか点が埋まっていけないので、 $\frac{1}{3}$ にあたる点や $\frac{1}{7}$ にあたる点、そして $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{7}$ の間に対しても様々な点を入れましょう。このように整数をもとにあらゆる点を作ります\*1。



これで点がつながりました。しかしこれは連続な直線ではないのです。なぜなら、たとえば $\sqrt{2}$ で直線は切れています。切れているけど、隙間はありません。え？ 何だって？ 言ってることが矛盾していないかって？ そうですね。何となく矛盾しています。でも、普通の意味での隙間は指摘できないはず。それは、 $\sqrt{2}-\epsilon$ と $\sqrt{2}+\epsilon$ の間には、無数の点を埋め込むことができますから、隙間を見つける暇はありません。でも連続ではないのですよ。

この不思議な状態は「稠密 (ちゆうみつ)」と呼ばれています。一対一対応と言いながら、どうもしっくりこない対応がされているのは、こんなところに微妙な感覚が潜んでいたからなんです。

---

\*1 こういう点は「有理点」と呼ばれます。