# ◆一対一対応は怪しげな関係◆

一対一の対応は、大変直感的で分かりやすいものです。6 人の子どもがいて、一人ひとりが帽子を持っていれば、子どもと帽子は一対一対応をしています。もし、帽子に名前が書いてあれば、A という名の子どもは A と書かれた帽子を手にするでしょう。決して、B と書かれた帽子を手にすることはありません。逆に C と書かれた帽子は C という名前の子どもの物ですから、決して D という子どもが手にすることもないでしょう。

つまり、子どもの中のだれか一人を選べば、ただ一つの帽子を決定できるし、帽子の中からどれか一つを選んでも、ただ一人の子どもを決定できます。一対一対応の本質はここにあります。

私たちは、小学校から自然な形で一対一対応に親しんでいます。低学年でものを数える作業は、ものと自然数との対応になっています。高学年で比例の学習をするときも、何々の何倍という言い方をしていますが、もとの状態と何倍かしたあとの状態が対応しています。

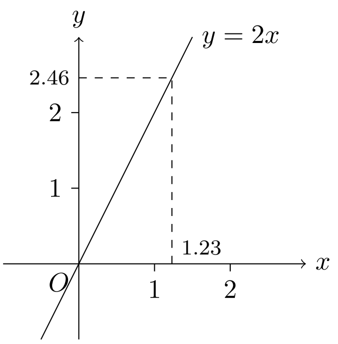
また、練習問題を解く場合は、大抵一つの答がでるものですが、これは一対一対応の問題を選んでいるからなのです。時速何 km で何時間進むと距離はどれだけですか？　底辺と高さがそれぞれ何 cm である三角形の面積を求めなさい、などはきちんとした対応の上に成り立つ問題です。ですから、答も一つだけでるのです。

もし、3 km 先の公園まで歩くと何時間かかりますか？とか、面積が何々 $\mathrm{cm}^2$ の長方形の縦と横の長さはどれだけですか？などと質問されたら困ります。一対一対応ではないからです。

その点、比例は一対一対応の模範生です。簡単な例で $y = 2x$ を考えましょう。大変おおまかな考えですが、

| $x$ | $\ldots$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $(1.23)$ | $2$ | $3$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\ldots$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $(2.46)$ | $4$ | $6$ | $\ldots$ |

と対応表を作っておけば、整数間の半端な値も想像しやすいでしょう。そこから、$x, y$ の関係がグラフ上に

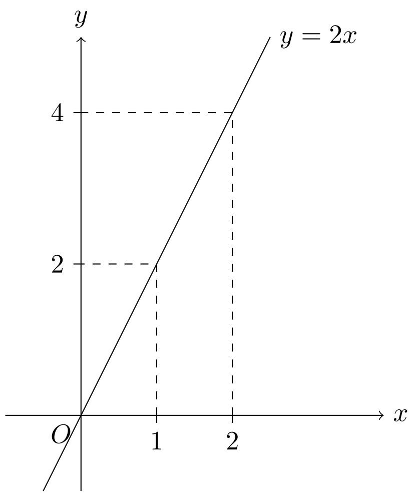



と浮かび上がることも自然に理解できるはずです。

そして、表の対応からでもグラフからでも、たとえば $x = 1.23$ に対してただ一つの $y = 2.46$ が対応した

り、また、$y=\pi$ のような値でさえもただ一つの $x=\dfrac{\pi}{2}$ が対応することが分かります。大変気持ちのよいものですね。

では同じグラフで、目を $1 \leq x \leq 2$ に向けてみましょう。ここでは範囲を指定したわけです。すると、$x$ の範囲に対応して $y$ の範囲が決まります。それは $2 \leq y \leq 4$ です。$x$ のある一つの区間に対して、$y$ のある一つの区間が対応しているので、特別おかしなことはないと思うでしょう。でも、グラフをよく見てください。




$x$ の区間の長さは 1 なのに、$y$ の区間は 2 の長さです。あれれ？　きちんと $x$ 軸上の点と $y$ 軸上の点は一対一対応をしていたはずですね。なのに、どうして長さが変わってしまうのでしょう。

一つの考えとしては、点は隙間を空けて並んでいるというものです。隙間が開いていれば、$x$ 軸上での間隔と $y$ 軸上での間隔が違えば、完璧な一対一対応でも見た目の長さは変わってきます。でも、点と点の間に隙間はありません。それは次のようにして説明できます。

まず、点と点の間に隙間があるというのは、点と点の間に値がないと考えてよいでしょう。仮に $x$ 軸上の $a$ と $b$ の間に隙間があるとしてみます。しかし、$a$ と $b$ の間には自由に点を打つことができます。一つの例は $\dfrac{a+b}{2}$ を作ることです。このことから任意の 2 点の間には、隙間なんてあり得ないことがわかります。つまり点はつながっているのです。ただ、数学では「(つながっている) = (連続)」**ではない**ことを指摘しておきます。この微妙な考えは、目の前の疑問を解決してから話すことにしましょう。

点と点の間に隙間がないとすれば次に考えたいのは、点はつながっているが、ゴムのように伸び縮みが可能だというものです。$x$ 軸上の区間が始めの状態、$y$ 軸上の区間が 1 秒後の状態です。ゴムは始めも 1 秒後も同じ物ですから、この感覚のほうが自然でしょうか。

でも、$y=2x$ の例は直線が伸びているわけではありません。いまの例ではグラフの長さは $\sqrt{5}$ ですが、直線上の点から $x$ 軸と $y$ 軸を同時に見れば、それぞれ一つの点しか対応していません。一対一対応であること

は間違いありません。けれど $\sqrt{5}$ から $x$ 軸を見れば長さ 1 に、$y$ 軸を見れば長さ 2 になっています。何か変ですね。

混乱の原因は「対応」にあります。ここでの対応は、私たちが普段考えている対応とは根本が違うのです。

たとえば「りんごが 5 個ある」とは、各りんごに自然数 1, 2, 3, 4, 5 が一対一対応していると見ます。このとき、りんごの数（かず）は 5 に等しいと言います。普段はこんな見方をしませんが、数をかぞえるとはこういうことなのです。

では、同様の考えで偶数の数をかぞえてみましょう。りんごの例同様に、偶数に自然数を一つづつあてがえばよいので、

$$\begin{array}{cccccccc} \text{偶数} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\ \text{自然数} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

のような対応になります。対応は無限の彼方へ向かって行きますが、もれなく対応がついていることに注意を払ってください。5 個のりんごに自然数が 1 から 5 まで対応して、りんごの数と自然数の数が等しいとみなしたので、偶数と自然数がすべて対応していれば、やはり偶数と自然数は同じ数（かず）だけある、と考えるのがよいでしょう。このときに数（かず）ということばは適切でないように思えるので、「濃度」という用語を使いたいと思います。

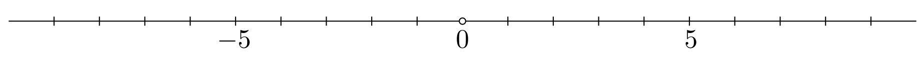
これを見ると、日常の感覚では偶数は自然数の半分しかないはずなのに、互いに一対一の対応がつく量と言えるのです。不思議な感覚ですね。

そして、濃度の感覚が先ほどの $y = 2x$ の関係に当てはまります。$x$ 軸上の区間 $1 \leq x \leq 2$ と $y$ 軸上の区間 $2 \leq y \leq 4$ は等しい濃度です。自然数は偶数の 2 倍あるように見えても、等しい濃度であるがゆえに、一対一対応になります。同様に、区間 $2 \leq y \leq 4$ は区間 $1 \leq x \leq 2$ の 2 倍あるように見えても、等しい濃度であるがゆえに一対一対応になっているのです。何だか分かったような意味不明のような . . .。

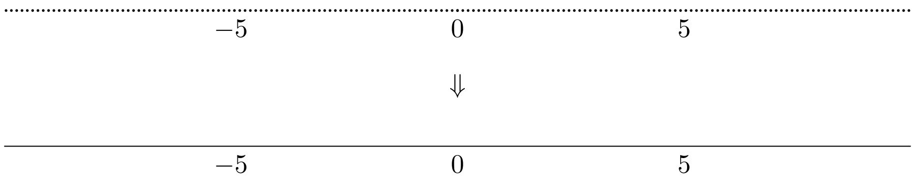
そう感じるのは仕方ありません。それは、直線自体が不思議な性質を持っているからです。

直線は無数の点によってつながっています。そして、ある視点のもとでは「連続」ですが、視点を変えればつながっていても連続ではない状態なのです。これまた意味不明ですね。順を追って説明しましょう。

まず、数直線は「連続」な直線です。連続とは切れ目がないということなのです。連続な直線に切れ目を入れるのは簡単です。任意の 1 点を抜けばよいからです。たとえば、数直線から点 0 を抜けば、直線は正の部分と負の部分に分けられます。



さて、今度は整数値の点をもとに直線を作ってみましょう。作り方はさっきの考えで、0 と 1 の中間に 0.5、さらに 0 と 0.5 の間に 0.25、またその間に 0.125、またまた . . .、という具合にです。それだけでは中間部分にしか点が埋まっていかないので、$\frac{1}{3}$ にあたる点や $\frac{1}{7}$ にあたる点、そして $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{7}$ の間に対しても様々な点を入れましょう。このように整数をもとにあらゆる点を作ります[*1]。




これで点がつながりました。しかしこれは連続な直線ではないのです。なぜなら、たとえば $\sqrt{2}$ で直線は切れています。切れているけど、隙間はありません。え？　何だって？　言ってることが矛盾していないかって？　そうですね。何となく矛盾しています。でも、普通の意味での隙間は指摘できないはずです。それは、$\sqrt{2}-\epsilon$ と $\sqrt{2}+\epsilon$ の間には、無数の点を埋め込むことかできますから、隙間を見つける暇はありません。でも連続ではないのですよ。

この不思議な状態は「稠密（ちゅうみつ）」と呼ばれています。一対一対応と言いながら、どうもしっくりこない対応がされているのは、こんなところに微妙な感覚が潜んでいたからなんです。

[*1] こういう点は「有理点」と呼ばれます。