◆ $1+1=2$ であることを証明できる？◆

$1+1=2$ であることや、正三角形の内角がすべて $60°$ になることは、私たちにとって当たり前のことです。当たり前と言っても、そこは数学の話、当たり前であることでも「証明」をしなくてはなりません。

たとえば正三角形。これは 3 辺の長さがすべて等しい三角形のことですから、三つの内角もすべて等しいのは当然ですね。本当にそうですか？　もしそうなら、同じ言い方で 3 を 4 に変えた、4 辺の長さがすべて等しい四角形は四つの内角もすべて等しい、も当然のことになりかねません。でも、事実は違います。4 辺の長さがすべて等しい四角形は「ひし形」であって、正方形ではありません。4 辺の長さがすべて等しいからという理由で、内角もすべて等しいとは言えないのです。だから

正三角形の内角はすべて $60°$ である　　(※)

ことは、きちんと証明をした上で言えることなのです。

すると、私たちが当然のごとく使っている「$1+1=2$」も、証明が必要になるでしょう。

数学の理論は、「定義」と「定理」で成り立っていると言っても過言ではありません。「定義」とは、私たちが決める必要最小限の約束です。たとえば「1 は "いち" である」とか「3 本の線分で囲まれた図形を三角形という」とか「$2\times 2\times 2$ を 2^3 と書く」などは定義です。いかに数学とはいえ、はじめに何らかの約束をしないと物事は進みません。だから定義は "証明以前の約束" なのです。また、定義は無条件の約束ですから、どのような約束を作ってもかまわないのです。しかし「$2\times 2\times 2$ を 4^5 と書く」と決めても、この約束からは何も生まれないでしょう。その意味で定義とは、ある方向へ発展するための素地にあたるものと言えます。

一方「定理」とは、定義から論理的に導かれたことがらです。場合によっては、定理をもとにして、さらに新たな定理を導くこともあります。このときの論理的な導きがいわゆる証明と呼ばれるものです。ですから（※）は定理です。なぜならこの事実は、「ユークリッドの原論[*1]」で定義されたことがらを素地にして、理論を積み重ねた結果、導かれた事実だからです。

ところでユークリッドの原論は

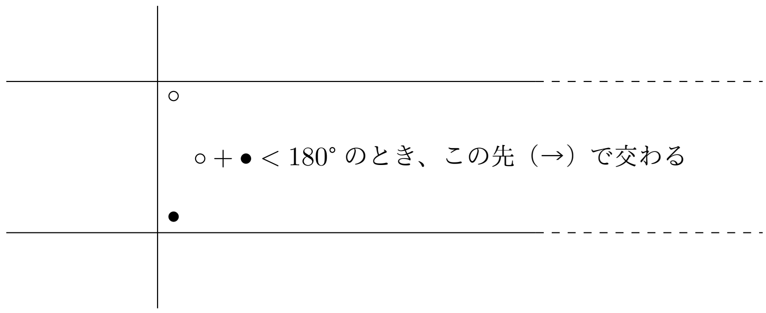
1. 点とは部分をもたないものである
2. 線とは幅のないものである
3. ...

[*1] ユークリッド (330?B.C.–275?B.C.)：ギリシアの数学者。

で始まる 23 の定義と

1. 任意の点から任意の点に直線をひくこと
2. 線分を延ばして一直線とすること
3. 任意の点を中心とした円を描くこと
4. 直角はすべて等しい
5. 1 本の直線が 2 本の直線と交わり、その片側の二つの内角の和が 2 直角よりも小さいときには、この 2 直線を限りなく延長していけば、この側で交わる

という 5 個の要請（定義と同等のもの）が記されています。そしてこの後に、いろいろな命題や定理が示してあるのですが、特に要請の 5 番めにあたる文章は「平行線の公理」と呼ばれ、幾何学に大きな影響を与えました。



5 番めの要請は、それ以前の四つの要請に比べ内容が込み入っています。そのためこれは、23 の定義と 4 番めまでの要請を使って証明できるのでは、と考えられました。しかし結果は「証明できるものではない」というものでした。それどころか、この 5 番めの要請を取り払っても、矛盾のない新たな幾何学を構築できることも分かったのです。この幾何学は「非ユークリッド幾何学」と呼ばれ、いくつかのモデルが存在します。つまり 5 番めの要請は、ユークリッド幾何学を構築するために必要な、まさに「要請」だったわけです。言い換えれば、5 番めの要請がユークリッド幾何学へ発展させる素地になっているのです。

すると、話は少々ややこしくなってきます。それは、さきほど私たちにとって当たり前であった（※）が、非ユークリッド幾何学では成り立たない場合があるからです。そのことを考慮するなら、（※）はいかなる場合でも真実であるとは言えず、（※）の証明が効力をもつのは、ユークリッド幾何学の範囲に限られることになります。

さて、ここで話題を $1 + 1 = 2$ に戻します。

私たちが普段使う数学には、「1 は "いち" である」とか「+ は "足すこと" である」という約束が素地になっています。したがって、これらは定義に相当するので証明は不要です。しかし「$1 + 1$ が 2 になること」は定

義ではありません。かと言って、定理と言い切るには証明を必要とします。ここでは、ユークリッド幾何学同様に、「$1+1=2$ であること」は要請と考えたいと思います。

というのは、世の中には「$1+1=3$」や「$1+1=1$」になるような現象を探すことは可能です。だから必ずしも「$1+1=2$」を数学の素地にしなくとも、別の数学を作れるかもしれません。別の数学が作れれば、いかなる場合でも「$1+1=2$」が真実であるとは言い切れません。しかし、そういったことを認めると、非ユークリッド幾何学同様、非日常的な数学になってしまいます。

ユークリッド幾何学が 5 番めの要請によって、現実的な幾何学を構築するように、「$1+1=2$」が要請されること、それはつまり、数の基本体系を $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ とすることで、現実的な数学が構築されるのです。つまり「$1+1=2$ **である**」ことは、現実的な数学を要請するという観点に立てば、証明すべき性質のものではないことになります。**しかしながら数の基本体系が $\boldsymbol{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots}$ のとき、「$\boldsymbol{1+1=2}$ になる」ことは証明すべきことであり、実際に証明できるものなのです。**