◆0 の 0 乗にひそむ約束ごと◆

0^0 の答はいくつになるのでしょう。

そもそも a^b という書き方は、同じ数を何回も掛け算する場合の表記方法です。つまり約束ごとです。2^5 と書けば 5 つの 2 を掛けあわせることです。つまり、

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

と計算します。では 0^0 と書けば、0 個の 0 を掛け合わせることになりますね。あれ？　0 個の 0 を掛けるってどういうことなんでしょう。0 個掛けるって何も掛けないことだろうから、答はきっと 0 になるんじゃないでしょうか。いえいえ、0 乗というのは計算して答をだすのではなく、どんな数でも 0 乗したら 1 になるという約束があるのだから、0^0 は 1 です。

さて、困りました。どちらの言い分が正しいのでしょうか。それとも 0^0 には答があるのでしょうか。

こういうときは原点に戻って考えるのが一番でしょう。一体どうして 0 乗などという表現がでてきたのでしょうか。さっきも書きましたが 2^5 の答は 32 です。同様の計算で 2^3 の答は 8 になります。もしここで $2^5 \div 2^3$ の計算をするならば、指数の意味を考えて

$$2^5 \div 2^3 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 \times 2 \ (= 4)$$

とするでしょう。ここで最後に 2×2、すなわち 2^2 が残りますが、これはあたかも $2^5 \div 2^3 = 2^{5-3}$ であるように計算できることを意味します。このことを利用すれば $2^{12} \div 2^7$ の計算も、わざわざ分子分母に 2 をたくさん書かなくても計算できることになります。すなわち

$$2^{12} \div 2^7 = 2^{12-7} = 2^5 = 32$$

でよいわけです。

もしこのルールがどんなときでも使えるとなれば、$2^3 \div 2^5$ の計算も

$$2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

になるはずです。でも -2 乗ってどういうことでしょうか。本来 $2^3 \div 2^5$ の計算は

$$2^3 \div 2^5 = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} \ \left(= \frac{1}{4}\right)$$

ですから、正しい答は $\dfrac{1}{4}$ です。ということは

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

でなければなりません。このことから「指数に負の数を使う」ことは、「指数に正の数を使って逆数に変える」ことと同じです。そこで指数に負の数を使ったときは、「逆数で表す」と約束しておくのがよさそうです。

では、$2^5 \div 2^5$ はどうなるでしょう。これまでのルールを適用すると

$$2^5 \div 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$$

です。$2^5 \div 2^5$ は明らかに 1 となります。それなら 0 乗の計算結果は 1 と決めるのがよいでしょう。と、ここまでが 0 乗すると 1 になることの説明です。

だったらこの約束通り $0^0 = 1$ じゃないんですか、と考えるのは早計です。$2^5 \div 2^5$ は正しくは

$$2^5 \div 2^5 = \frac{32}{32} = 1$$

と計算できます。それがさっきのルールで $2^5 \div 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$ とやったから $2^0 = 1$ と決められたのです。

でも 0^0 は、仮に $0^5 \div 0^5$ の計算だとしたら、正しくは

$$0^5 \div 0^5 = \frac{0^5}{0^5} = \frac{0}{0}$$

の計算をすることになるので、答はいくつでもよいことになってしまいます（「0 で割ることは罪深い」参照)。ですから、0^0 の計算は「禁止」するのがもっとも妥当なのでしょう。

しかし、それではすっきりしないので、0^0 についてもう少し考えてみることにします。

0 は $0 \times 1, 0 \times 2, 0 \times 3, \ldots$ とみることができます。すなわち $0 = 0 \times 1 = 0 \times 2 = 0 \times 3 = \cdots$ です。このことから 0^0 の右肩の ^{0} を $^{0\times 1}, ^{0\times 2}, ^{0\times 3}, \cdots$ に変えてもかまわないでしょう。つまり

$$0^0 = 0^{0\times 1} = 0^{0\times 2} = 0^{0\times 3} = \cdots$$

です。指数法則をおおらかに用いて

$$0^0 = (0^0)^1 = (0^0)^2 = (0^0)^3 = \cdots$$

が成り立ちます。もし 0^0 に何らかの答があって、その値が a であるなら

$$a = a^1 = a^2 = a^3 = \cdots$$

ということになるでしょう。a は何乗しても等しいのです。こんな芸当のできる数 a は 0 か 1 しかありえません。となれば、0^0 の答がいくつでもよいといっても、0 か 1 と考えるのが自然でしょう。

試しに x^x というものを考えてみます。x の値を 2 ぐらいから始めて、

$$2,\ 1,\ 0.9,\ 0.8,\ \ldots,\ 0.1,\ \ldots,\ 0.01,\ \ldots,\ (0)$$

と徐々に 0 に近づけていきましょう。x^x の値はどう変化するでしょうか。表は x の値を徐々に 0 に近づけていったときの x^x の値をコンピュータによって計算させてみたものです。

x	x^x	変化の割合
2	4.000000000000	—
1	1.000000000000	-3.00
0.9	0.909532576083	-0.90
0.8	0.836511642073	-0.73
0.7	0.7790559126704	-0.57
0.6	0.7360219228178	-0.43
0.5	0.7071067811865	-0.29
0.4	0.6931448431551	-0.14
$(0.3679\cdots)$	$(0.6922\cdots)$	(正負の境目)
0.3	0.6968453019359	$+0.04$
0.2	0.7247796636777	$+0.28$
0.1	0.7943282347243	$+0.70$
0.01	0.9549925860214	$+1.79$
0.001	0.9931160484209	$+4.24$
0.00001	0.9998848773725	$+6.84$
0.000000001	0.9999999792767	$+11.5$

この表はちょっと不思議な結果を示しています。というのは、x の値が 2 よりもっと大きいところでは x^x の値はとてつもなく大きな値になると想像されます。しかし、x の値を 0 に近づけるほど x^x の値が 0 に近づくわけではないようです。$x = 0.36$ あたりを底に増加に転じます。これをみると x がごく 0 に近いときは、x^x は 1 に近づくようです。それなら 0^0 は 1 とするのがよいようです。

もっと詳しく x^x の変化を追ってみましょう。

$$y = x^x$$

とおいて両辺の自然対数をとり、この両辺を x で微分します。

$$\log y = \log x^x = x \log x$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + x\frac{1}{x}$$

$y = x^x$ を代入して、

$$\frac{1}{x^x}\frac{dy}{dx} = \log x + x\frac{1}{x}$$

より

$$\frac{dy}{dx} = (\log x + 1)x^x \ .$$

これより $x > 0$ における増減表（$+\infty \to 0$）を作ってみましょう[*1]。

[*1] 増減表は本来、左から右へ見て ↘, ↗ の矢印を記入しますが、$x \to 0+0$ の極限を調べているので、あえて表を右から左へ見て、

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$\frac{dy}{dx}$	$\backslash$	$-$	0	$+$
y	0^0	$\nwarrow$	$(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$	$\swarrow$

$x \to 0+0$ のとき x^x の値は 0^0 に近づいていきますが、さっきの表の結果からこの値は 1 とするのがよいでしょう[*2]。

$\nwarrow$, $\swarrow$ の矢印にしています。

*2 もっとも、これは 0^0 を x^x $(x \to 0)$ の関数で見た場合の話ですから、すべての 0^0 が 1 に等しいとするものではありません。0^0 はやはり不定値です。