◆ $0.2_{[10\text{ 進数}]} = 0.00110011\ldots_{[2\text{ 進数}]}$ になるのはなぜ？◆

「1001 ÷ 11、余りはいくつ？（計算機での話）」で 2 進数の話題がでました。そのときの脚注に

> $\dfrac{1}{5}$ は 10 進数では有限小数 0.2 ですが、
> 2 進数では 0.00110011 ... と無限循環小数になる ...

という文がありました。気に留めた人はいるでしょうか。同じ数なのに 10 進数では割り切れて 2 進数だと割り切れないのは変ですね。

そもそも私たちが自然に身につけている 10 進法とはどういうものでしょうか。0〜9 までの 10 種類の数字を使うから 10 進法である、というのは簡便な言い方に過ぎません。正確には「10 進法だからこそ 10 種類の数字しか使えない」のです。

私たちが何気なく使う数には「位取り」がなされています。つまり「913」は「9, 1, 3」ではなく「9 百 1 十 3」です。もし位取りがなければ、大きな数が必要になるたびに新たな数字（または記号）が必要になってしまいます。10 進法の位取りは「10 を一束にして一つ上の位にまわす」ことになっています。そのため 1〜9 までの数字を使い切ったら、次は 10 を一束にして上の位へまわさなくてはならないので、9 から先の数字を使うわけにいかないのです。先ほど 10 種類の数字しか使えないと言ったのはそういう理由からです[*1]。

では実際の 10 進法の仕組みを述べましょう。

一の位には空位の 0 と 1〜9 の数字が使えます。しかし一の位に 9 まで使った次は、それを 10 の束にして十の位にまわさなくてはなりません。十の位ではその束に対して空位の 0 と 1〜9 の数字が使えます。そこで十の位に 9 まで使った次は、それを 10 の束にして百の位にまわさなくてはなりません。十の位にはすでに一の位から 10 の束がまわってきているので、百の位には 10×10 の束がまわります。そしてその束に対して空位の 0 と 1〜9 の数字が使えます。そこで百の位に 9 まで使った次は、それを 10 の束にして千の位にまわさなくてはなりません。百の位にはすでに十の位から 10×10 の束がまわってきているので、千の位には $10 \times 10 \times 10$ の束がまわります。そして ...。

どうもことばで書くと長々となりますが、10 進法の仕組みは

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & \text{千の位} & \text{百の位} & \text{十の位} & \text{一の位} \\ \ldots & \boxed{a_3}10^3 & \boxed{a_2}10^2 & \boxed{a_1}10 & \boxed{a_0} \end{array}$$

---

*1 一般に n 進法は $(n-1)$ 種類の数字と空位の（位取りの）0 を使います。ちなみに 16 進法では空位の 0 の他に 15 種類の数字が必要です。そこで 9 の次の**数字**に A, B, C, D, E, F を使うのです。

ということです。a_0 や a_1 の部分に 0〜9 のどれか一つの数字が入って何桁かの数ができあがるのです。これらすべてをひっくるめたのが私たちが使う数ですから、10 進数は一般式で

$$a_{n-1}\dots a_1a_0 = 10^{n-1}a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0$$

と書ける数なのです。具体的には 913 なら

$$\begin{aligned} 913 &= 900 + 10 + 3 \\ &= 10^2 \cdot 9 + 10 \cdot 1 + 3 \end{aligned}$$

のことなのです。

この書き方を見ると、桁が一つ上がるごとに束が 10 倍ずつ大きくなっています。それなら逆に、桁が一つ下がるごとに束が $\dfrac{1}{10}$ 倍ずつ小さくなるわけですから、一の位の下には $\dfrac{1}{10}$、$\dfrac{1}{10^2}$ の束があるはずです。これがいわゆる小数点以下の数ということです。一般式では

$$a_{n-1}\dots a_1a_0\ .\ b_1b_2\dots = 10^{n-1}a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0 + 10^{-1}b_1 + 10^{-2}b_2 + \cdots$$

と書けるのです。具体的には 123.45 は

$$123.45 = 10^2 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 3 + 10^{-1} \cdot 4 + 10^{-2} \cdot 5$$

です。当たり前といえば当たり前です。実は 2 進法もこれと同じ仕組みなので、結論から言うとこの章の題も当たり前のことにすぎません。続けましょう。

2 進法は「2 を一束にして位取りする」表記法です。10 進法的に式にすると

$$a_{n-1}\dots a_1a_0.\ b_1b_2\dots = 2^{n-1}a_{n-1} + \dots + 2a_1 + a_0 + 2^{-1}b_1 + 2^{-2}b_2 + \cdots$$

です。これは 2 進数ですから各位の a_k や b_k に使える数字は 0 か 1 だけであることに注意してください。具体的には 2 進数の 110.011 なら

$$\begin{aligned} 110.011 &= 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 + 2^{-1} \cdot 0 + 2^{-2} \cdot 1 + 2^{-3} \cdot 1 \\ &= 4 + 2 + 0 + 0 + 0.25 + 0.125 \\ &= 6.375 \end{aligned}$$

となって、10 進数の 6.375 のことなのです。

それなら逆に 10 進数の 6.375 を 2 進数に書き直すにはどうすればよいでしょうか。整数部分の 6 については

$$\begin{array}{r@{\,}l} 2\,) & \underline{6} \\ 2\,) & \underline{3}\ \dots\ 0 \\ & 1\ \dots\ 1 \end{array}$$

のように 2 で割ったときの商と余りを書き出していき、商が 1 になったところで計算を終了します。そして商の 1 を先頭にして順に余りを拾えば 2 進数の 110 となります。この理屈は

$$\begin{aligned} 6 &= 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \\ &= 2(2 \cdot 1 + 1) + 0 \end{aligned}$$

だから 2 で割れば商が $(2 \cdot 1 + 1)$ で余りは 0 。その商 $(2 \cdot 1 + 1)$ は

$$2 \cdot 1 + 1 = 2(1) + 1$$

だから 2 で割れば商が (1) で余りは 1。最後に商の (1) だけが浮き出ます。実は次々と 2 で割って余りを出す作業は、$2^k a_k$ の a_k を次々浮き出させる作業なのです。

そういうことなら小数点以下も次々に $2^{-k} b_k$ の b_k を浮き出させればよいことになります。そのためには次々と 2 を掛けていき、小数点の左に浮いてきた数を拾えばよいでしょう。実際には

$$\begin{array}{llll} 0.375 & \times 2 = & \boxed{0}.75 & \ldots \quad 0 \\ 0.75 & \times 2 = & \boxed{1}.5 & \ldots \quad 1 \\ 0.5 & \times 2 = & \boxed{1}.0 & \ldots \quad 1 \end{array}$$

までやれば小数点以下が 0 になり、もう 2 倍する必要はないのでこれで終わりです 2 で割って余りを出すときは一の位から数が浮き出ましたが、この場合は小数第 1 位から数が浮き出るので、拾う順は浮き出た順に「011」です。

これでようやく 0.2 を 2 進数で表す準備ができました。いまと同じように 2 倍ずつしていき浮き出た数を拾っていきましょう。

$$\begin{array}{llll} 0.2 & \times 2 = & \boxed{0}.4 & \ldots \quad 0 \\ 0.4 & \times 2 = & \boxed{0}.8 & \ldots \quad 0 \\ 0.8 & \times 2 = & \boxed{1}.6 & \ldots \quad 1 \\ 0.6 & \times 2 = & \boxed{1}.2 & \ldots \quad 1 \\ \underline{0.2} & \times 2 = & \boxed{0}.4 & \ldots \quad 0 \\ & \vdots & & \quad\;\;\, \vdots \end{array}$$

までやってみるとすぐに気づくはずです。はじめの <u>0.2</u> が再び現れました。ということはこの先は同じことの繰り返しになるわけです。つまり 0.2 は 2 倍ずつを繰り返しても決して 1.0 が現れて終了することはないのです。だから 10 進数で有限小数で表せる 0.2 が、2 進数では無限循環小数になってしまうのです。