図形の証明

仮定の話

図形の性質や特徴を調べる際、小学校のときは当たり前で済ませたことをいちいち証明することに、いささかうんざりしていませんか？　しかし図形に限らず、数学のあらゆる分野は証明を必要とします。とは言え、日常の常識に合っている事柄には、口うるさく証明は求めませんでした。そりゃそうです。“数学の学習” と言っても、やはり義務教育の中での学習ですから、将来の実務につながるような学習でなければ意味がありません。数学的には証明が必要でも、日常的に**自明**なら証明は省くものです。

そもそも数学に限らず、学問は好きな人が好きなことを極めるためのものです。役立つかどうかは二の次で、役に立つと世間が認めた分野だけが切り取られて活用されているのです。現代社会では、数学のある分野が世の中に必要だから義務教育で学ぶのです。でも、数学が苦手な人には迷惑な話でしかありませんよね。そして、数学がどう役立っているか分からないから、『数学なんてやる必要ない』などと思うものです。気持ちは分かりますが “勘違い” してます。数学は

“世の中で役立つ” から義務教育に含まれるのであって、“あなたに役立つ” かどうかは無関係

なのです。あなたが数学を勉強する・しないはあなたが決めることですが、義務教育で数学を勉強する・しないはあなたが決めることではありません。国が決めることです。

さて、いまの話題で “勘違い” はなぜ生じたのでしょうか？　それは、個人の問題と社会の問題を混同したからです。個人の問題だと**仮定**すれば、数学をする・しないは個人の自由です。しかし、社会の問題だと仮定すれば、数学は社会の要請としてすべきものになります。仮定が異なれば話がかみ合わないのも当然です。

数学では、こんなことが起こらないように、議論を始める前にきちんとした仮定をします。中学校で**図形の証明**を学習するのは、社会における実用性よりも、数学的に筋道立てて考える力をつけるためでしょう。図形の学習で証明を学ぶことは、さらに上級の数学を学ぶ際に役立ちます。図形の証明は数学的考え方の基本なのです。ちなみに、図形のさらに進んだ実用的な学習は高校で学びます。

定義・公理

図形に限らず数学の議論を進めるには、はじめの一歩が必要です。それが**定義**です。たとえば図形の証明における定義は

平面において

1. 点と点を通る直線が引ける
2. 線分を延長することができる
3. 点を中心にある半径の円が描ける
4. 直角は等しい
5. ...

などを仮定することです。どれも常識的なことばかりですが、実はこれらは**ユークリッドの原論**[*1]では定義ではなく、**公準**（または**公理**）と呼ばれるもので、証明することなく認める事柄です。証明しないのですから定義と思ってもかまいません。

原論では、たとえば「**点**とは、大きさがなく位置があるもの」「**直線**とは、幅のない限りなく一様に横たわるもの」のようなところから定義しているようです。ちなみに、直線は限りなく伸びるまっすぐな線、**線分**は有限の長さのまっすぐな線のことです。結局はどの時点から定義を始めるかでその後の議論は変わるのですが、中学校の図形の証明では上記を定義と定めて

$$\boxed{\text{対頂角は等しい}}$$

を示すことから始めたでしょう。対頂角が等しい理由は、向かい合う二つの角の大きさがいずれも $180^\circ -$（共通の角）で求められるからでした。簡単な理屈ですが、基本的事実から導かれる、まぎれもない証明です。

対頂角の次は**同位角**だったはずです。同位角は平行線とともに語られることがほとんどなので、平行線は必須の条件と思うかもしれませんが、同位角は、

2 本の直線に 1 本の直線が交わるときにできる角のうち、特定の位置関係にある角

を指す用語です。位置関係によって他に、**錯角**、**同側内角**があり、どれも平行線とは無関係の用語です。ただ、平行線のときに**定理**となるのです。

さて、その同位角ですが

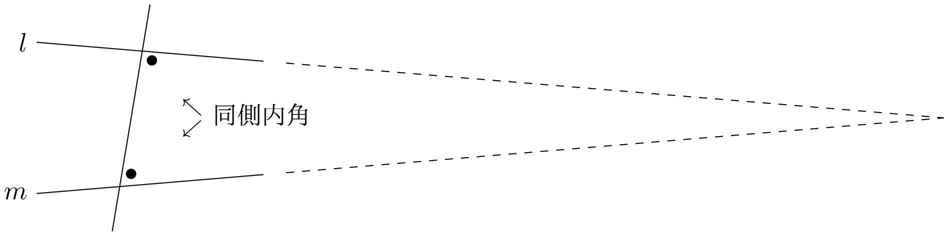
$$\boxed{\text{平行線において、同位角は等しい}} \quad (*)$$

ことは定理ではありません。もちろん定義でもありません。実は公理なのです。だから、おそらく授業では証明をしていないはずです。単に『平行移動すると同位角にあたる角はピッタリ重なりますね』などと言って、さも当然のように説明されたのではないでしょうか？

であれば先生は正しい説明を行いました。先ほど "図形の証明における定義" として提示したユークリッド

[*1] 紀元前 3 世紀ごろに古代エジプトのアレクサンドリアの数学者エウクレイデス（英語読み：ユークリッド）によって編纂（へんさん）されたと言われる数学書。

の公準には 5 番目があり、それは

> 平面において
>
> 5. 2 直線と直線が交わり、同側内角の和が平角（2 直角）より小さければ、2 直線を延長すると内角の和が平角より小さい側で交わる。
>
> 
>

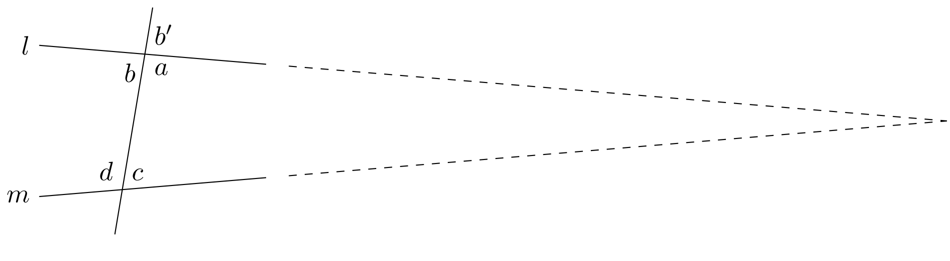
というものです。**平角（2 直角）**はなじみが薄いことばですね。180° のことです。5 番目の公準は 4 番目までに比べ複雑なので、証明すべきことに見えるかもしれません。しかし、これは証明できるものではなく、単に認めることでユークリッド幾何となるのです。そして、このことが平行線において同位角が等しくなる理由なので、(∗) は定理というより公理と言うべきものです。一方、「対頂角は等しい」と

$$\boxed{\text{平行線において、錯角は等しい}}$$

は証明できることなので、定理です。

同位角と第 5 公準

「平行線において、同位角は等しい」ことを第 5 公準から導きましょう。



まず図において、同側内角の和が $a+c<$（平角）ならば、直線 $l,\ m$ は交わってしまうので、**少なくとも** $a+c \geqq$（平角）でなければなりません。同じことが同側内角の和 $b+d$ にも言えるので、こちらも少なくとも $b+d \geqq$（平角）でなければなりません。

ところが $(a+c)+(b+d)=(a+b)+(c+d)=$（平角）$+$（平角）であり、$(a+c) \geqq$（平角）、$(b+d) \geqq$（平角）だったので、$(a+c)=(b+d)=$（平角）が言えます。すなわち

$$\boxed{\text{平行線において、同側内角の和は平角である}} \quad (**)$$

です。このとき、b, b' が対頂角の位置にある、すなわち $b = b'$ であることに注意すると

$$a + c = (\text{平角}) = a + b = a + b'$$

となって、$c = b'$ が言えます。c, b' は同位角の位置なので、$(**)$ であることと

$$\boxed{\text{平行線において、同位角は等しい}}$$

ことは**同値**となります。

結局、平行線において同位角が等しいことは、第 5 公準の言い換えに過ぎないこととなり、定理ではなく公理、もしくは定義だと思って差し支えないのです。

証明

何らかの証明問題を解くとき、授業や試験などでは証明の書き方がおおむね決まっているのではないでしょうか。なぜかというと、定型文のように型を決めておくと、授業の進行や試験の作問に便利だからでしょう。しかし、そのような型にこだわると証明の手順より記述の順序などに気が回ってしまい、本末転倒になりかねません。

そもそも、証明問題は示すべき結論があらかじめ分かっているので、計算問題に比べて指針を立てやすいはずです。しかも計算問題と違って、先頭から順に書き進める以外に、後ろから書きつないでもよいのです。だから

　結論を示すためには、その前に何が言えればよいのか
$\to$ さらにそのことが言えるためには、その前に何が言えればよいのか
$\to \ldots$

という思考過程も成り立ちます。そして、先頭からの説明とつながればよいので、先が見えない計算問題より簡単かもしれません。

もし証明問題が難しいとすれば、どう考えてよいか分からないのではありません。そんなことは論外です。考えられることはすべて考えればよいのです。なぜ、そうしないのでしょうか？　むしろ難しい部分は、いま見つけた理屈が証明の根拠に使えるかどうかなのです。証明問題は一見当たり前のことを説明させることがあり、その場合、

この時点で使ってよい定義や定理が何なのかを、完全に把握できていないとダメ

だということです。自分のなかで当たり前だと理解していても、授業で扱っていないことは証明の根拠になら

ないのですから。

三角形の合同条件・相似条件

図形の証明で活躍する定理が**三角形の合同条件**、**直角三角形の合同条件**、**三角形の相似条件**です。二つの三角形が合同であると言えるのは

1. 対応する 3 辺の長さがそれぞれ等しい
2. 対応する 2 辺の長さと間の角の大きさがそれぞれ等しい
3. 対応する 1 辺の長さと両端の角の大きさがそれぞれ等しい

のいずれかが当てはまる場合であり、これ以外は原則合同ではありません。"原則" と書いたのは 3. は

$3'$. 対応する 1 辺の長さと任意の 2 角の大きさがそれぞれ等しい

であれば、二つの三角形は合同になるからです。

しかし、2. を

$2'$. 対応する 2 辺の長さと任意の 1 角の大きさがそれぞれ等しい

で代用することはできません。正確には、代用してよい場合と代用してはいけない場合があります。よく考えてみましょう。

直角三角形の合同条件は

1. 斜辺の長さと対応する他の 1 辺の長さがそれぞれ等しい
2. 斜辺の長さと対応する他の 1 角の大きさがそれぞれ等しい

また、三角形の相似条件は

1. 対応する 3 辺の比がそれぞれ等しい
2. 対応する 2 辺の比と間の角の大きさがそれぞれ等しい
3. 対応する任意の 2 角の大きさがそれぞれ等しい

です。特徴的なのは条件 3. で、このことが高校の**三角比**の定義へつながります。

証明の意義

図形の証明においては証明を学ぶこと自体が勉強なので、半（なか）ば分かりきったようなことを丁寧に説明するのは仕方ありません。しかし、他の単元では公式や定理の証明を示すことはあっても、実際は公式や定

理を使いこなせるように練習することに重点が置かれます。それも当然で、限られた授業時間の中で高い効果を得る、つまり試験でよい点数が取れるようにしようと思えば、公式や定理の成り立ちに "無駄な" 時間を割くわけにはいかないのでしょう。

でも、本当に数学の力を高めたいのなら、むしろ公式や定理の成り立ちや仕組みをよく理解すべきなのです。なぜなら、そこに「**数学的な見方や考え方**」があるからです。

不健康な人は健康的な生活を求められます。逆に不健康なことができる人は健康なのです。また "無駄遣い" という言葉は、無駄ができる余裕があるときに使われます。無駄は "不要" とは違います。数学の学習においても、いちいち証明を理解するのは骨が折れます。すでに先人が証明したものなら、どんどん使いこなす方が効率的でしょう。皆さんには時間という制約が常にあるので、時間を無駄にしたくないのは分かります。数学に割ける時間がたくさんある人は、そうそういないですからね。だから、時間を割くなら何かを犠牲にしなくてはなりません。結局のところ数学ができるようになるには、

結論だけ暗記するような学習ではなく、自分で調べて、類題を真似て、よく考える

ことです。このような時間をどれだけ確保するかはあなた次第です。無駄に思える公式・定理の成り立ちに時間を割けるぐらいの余裕ができるとよいのですが。