式の展開と因数分解

展開

　式は計算する際、**展開**したりまとめたりしながら**整理**します。手始めに習う展開の公式は

$$\boxed{\begin{array}{l} \cdot\ m(a+b) = ma + mb \\ \cdot\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\ \cdot\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\text{、}\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \cdot\ (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \end{array}}$$

といったところでしょうか。このまま丸暗記をしても使いにくいと感じる人は、たとえば

$$\cdot\ \triangle\,(\bigcirc + \square) = \triangle\bigcirc + \triangle\square$$

$$\cdot\ (\bigcirc + \square)(\bigcirc - \square) = \bigcirc^2 - \square^2$$

$$\cdot\ (\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2\,\bigcirc\square + \square^2\text{、}\quad (\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2\,\bigcirc\square + \square^2$$

$$\cdot\ (x + \bigcirc)(x + \square) = x^2 + (\text{和})x + (\text{積})$$

のように見ているかもしれません。または展開の際に

$$(a+b)(c+d) = \overset{\text{①}}{ab} + \overset{\text{②}}{ac} + \overset{\text{③}}{bc} + \overset{\text{④}}{bd} \quad (*)$$

のような順で掛けるイメージを持っているかもしれません。どんなイメージでも、そういうことが無意識に身についているならそれでかまいません。それがあなたにとって自然なのですから。また練習を積めば、たとえば $(2a-3b)^2 = \cdots$ の先は公式に当てはめなくても自然と手が動くという人もいるでしょう。

　でも、数学の力をもう一段上げるには、公式は公式のまま使えることも必要です。このとき、公式の文字は単に一文字ではなく、別の何かを**代入**できる対象であるという意識は持っていましょう。

　一つだけ具体例を挙げます。$(a-b+3)^2$ の展開を考えます。これは公式にありませんね。でも、“公式の一文字は別の何か” であるとしたら、これは公式 $(a+b)^2$ の文字 a、b をそれぞれ $a-b$、3 であると見て

$$(\ \overset{a-b}{a}\ +\ \overset{3}{b}\ )^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

のように公式に当てはめることができます。すなわち

$$(a-b+3)^2 = (a-b)^2 + 2\cdot(a-b)\cdot 3 + 3^2$$

なのです。であれば、この先の計算は容易ですね。

さらに言えば、たとえば公式 $(a+b)^2$ は、授業の中で $(a+b)(a+b)$ を順に掛けて導いたと思いますが、数学的にきっちり示すなら、

積の交換法則： $ab = ba$

分配法則 1： $a(b+c) = ab + ac$、　**分配法則 2：** $(a+b)c = ac + bc$

だけが使える条件のもとで

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) &&\text{（指数の記述の約束）}\\ &= (a+b)a + (a+b)b &&\text{（分配法則 1）}\\ &= aa + ba + ab + bb &&\text{（分配法則 2）}\\ &= aa + ab + ab + bb &&\text{（積の交換法則）}\\ &= a^2 + 2ab + b^2 &&\text{（指数、同類項の記述の約束）}\end{aligned}$$

とします。ただ、ここで用いた約束・法則は誰もが身につけている自然な規則なので、その前提で $(*)$ のようにすることはまったく妥当です。言いたいことは、自然で妥当なつもりで、実は自分勝手な思い込みで計算などを行わない、ということです。その挙げ句、間違ったことが身についてしまわないよう、ときには完璧な定義の積み重ねだけで考えることも必要です。高校以上の数学では、とくにそうでです。

因数分解

因数分解は展開の逆の操作です。展開は特別難しいことはなくても、因数分解にはそれなりのコツが要ります。と言っても、基本は**共通因数**をくくり出すことと展開の公式に当てはめることです。たとえば $x^2+8x-48$ なら、和が $+8$、積が -48 となる 2 数を探すことになりますが、数回試せば $(x-4)(x+12)$ が見つかります。

数学が苦手な人なら『一発で正しい組を見つける方法や公式はないか』と尋ねがちです。そして、その方法は "ある" のです。ただし、2 **次方程式の解の公式**を用いるというものです。もちろん、それでは本末転倒なのですが、

"数学の問題を解くには公式や解法が必要で、試行錯誤で解くものではない" という間違った考え

が根底にあるのでしょう。間違った考えは質（ただ）しましょう。むしろ、試行錯誤で解くものです。

数学の問題をテキパキと解いている人を見ると、公式が一瞬でひらめくのだろうかと思いがちです。しかし、実際は試行錯誤をしています。そうでなければ、いわゆる初見の問題など解けません。即座に解いているように見えるのは、試行錯誤の挙句、正しい道筋だけが身についた結果です。つまり、それだけ多くの時間をかけて自分のものにしたのです。

ところで、試行錯誤で簡単に因数分解ができるものでしょうか。もちろん、闇雲に取り掛かるのはよくありません。試行には手順があります。因数分解であれば、

$$\boxed{\text{まず、共通因数をくくり出す}}$$

ことから始めます。例として $4x^2-12x+36$ の因数分解を考えます。公式第一主義の人なら、$4x^2=(2x)^2$、$36=(-6)^2$ であることはすぐ分かります。その上で $2\cdot(2x)\cdot(-6)=-12x$ であることから $4x^2-12x+36=(2x-6)^2$ とできます。これは因数分解としては正しいです。因数分解をする理由の一つは、因数に分けて**次数を下げる**ことにあるからです。その意味で、この因数分解は 2 次式を 1 次式の積にできたので問題ありません。

しかし、単に因数分解を求める問題では、より簡単な式を要求されます。$2x-6=2(x-3)$ なので、より簡単な式で表せています。したがって

$$(2x-6)^2=\{2(x-3)\}^2=4(x-3)^2$$

というところまで行って正答です。しかし、まずはじめに $4x^2-12x+36=4(x^2-6x+9)$ と、共通因数をくくり出せば同じ正答にすぐたどり着きます。因数分解の試行の順番は、共通因数からなのです。

直観による因数分解

直観とは、いちいち理屈を持ち出すことなく確実に正しい計算ができる状態を指します。"当てずっぽう" とは違います。つまり、この式ならこう変形できるということが身についているわけで、それはよいことです。具体的には、たとえば

$$a(x-3)+x-3=(a+1)(x-3) \quad \text{や} \quad -x+3=-(x-3) \quad \text{など} \quad (\text{※})$$

が、理屈抜きでサッとできるようなことです。でも、直観が身につくためには、体に染みつくぐらいの演習量は必要です。

一方で、何かを一つの文字に**置き換え**るのは、見通しをよくするための重要な方法です。(※)の一つ目の式なら、$x-3=X$ と置き換えて $aX+X$ にすれば、分配法則 $(a+b)c=ac+bc$ に当てはまり $(a+1)X$ にできます。教科書などに説明はないと思うのですが、第 2 項の X は $1X$ を省略して書いたものです。しかし、このようにきっちり考えなくとも、$a(x-3)+(x-3)$ と見て即座に共通因数 $(x-3)$ がくくり出せると気づくのが直観なのです。演習を重ねるうちに、置き換えは要らなくなるものです。

(※)の二つ目の式は、それ自体直観的でしょうか。これを $-(x+3)$ などと、とんでもない勘違いをするのはもってのほかです。そもそも $-(x+3)$ を展開すると $-x-3$ なので、元の式と違うことに気づかない方が

おかしいのです。もし、$-x+3$ を直観で変形しないとなると

$$-x+3=(-1)\cdot x+(-1)\cdot(-3)=(-1)\{x+(-3)\}$$

のようにして共通因数 -1 を探さなくてはなりません。いくらきっちりした変形だとしても、さすがにこれは現実離れしています。

もう少し気づきにくい式、たとえば

$$a(x-3)-x+3$$

などは共通因数がなさそうに見えます。しかし直観が働けば、$-x+3$ は $x-3$ と関係ありそうだと気づけます。そうすると、とくに置き換えなどしなくとも $(a-1)(x-3)$ が見えるのではないでしょうか。ちなみに、この例は（※）の一つ目の式とは異なる式ですよ。

因数分解のリクツ

因数分解は公式に当てはめるだけではうまくなく、それなりの形式や理屈があります。すると、そのパターンを覚えようとするのが常ですが、暗記一辺倒では立ち行かなくなることも多いのです。柔軟な発想ができるよう、試行錯誤を数多く経験すべきですよ。とは言え、公式以外で重要なことは

$$\boxed{\text{次数が低い文字で整理する}}$$

ことでしょうか。もちろん絶対的なルールではないのですが、うまくいく可能性が高くなるのも事実です。

こんな例はどうでしょう。$x^2y+x+xy+1$ の因数分解を試みます。x^2 が目につくので y は数値扱い、つまり係数のつもりで

$$x^2y+x+xy+1=y\cdot x^2+(y+1)\cdot x+1$$

のように整理します。しかし、これでは他に共通因数が見えてきません[*1]。そこで次数が低い y で整理、すなわち x が数値扱いで

$$x^2y+x+xy+1=(x^2+x)\cdot y+x+1=\cdots$$

としたらどうでしょう。$(x^2+x)=x(x+1)$ が見えますね。そこで $x+1$ を共通因数としてくくり出せば

$$\cdots=x(x+1)y+(x+1)=(x+1)(xy+1)$$

と因数分解ができます。都合のよい説明でしたが、次数が低い文字に着目するのは基本だと思います。

ところで、数学が苦手な人には　$x(x+1)y+(x+1)\to(x+1)(xy+1)$　が見えないようです。これで見えなければ、共通因数を A で置き換えた $xAy+A$ を見ても気づかない場合があるようです。$A=A\cdot 1$ が意

[*1] たすき掛けで因数分解はできる。

識できていない上に、共通因数をくくり出すことが展開 $m(a+b)=ma+mb$ と結びついていないからだと思われます。

数学ができる・できないの境目はこういうところに現れるものです。そういう人たちは往々にして

・定義などを忠実に再現できない

・自分勝手な解釈をしている

などの特徴が見受けられます。なぜそういう風になるかというと、おそらく "面倒" なのでしょう。式変形を丁寧にすれば手間も時間もかかります。だから忠実に再現する訓練を怠（おこた）るのです。また、深く考えることを避けたい思いから、テキトーなところで理解したことにするのです。

とは言え、数学が嫌いな人には自然な行為なのでしょう。そこで『数学が好きになるにはどうすればよいか』などと考える人がいます。しかし、ものごとの好き嫌いは簡単に変わるものではありません。もし受験に数学が必要なら、嫌いであろうがなんであろうが勉強をするしかありません。好きになってから、などは逃げているに過ぎないのです。

数学が嫌いで必要ないと思えば捨ててもよいのですよ。でも、進級や受験があるため捨てられないなら、最低限のことはやるしかありません。中学・高校の数学で詰んでしまわないためには

早い時期から、自分で考えて解く習慣をつける

しかありません。自分で考えるのは時間がかかる行為です。時間を有効に使うなら、毎日少しずつ数学を勉強することです。そうすると何かを犠牲にしなくてはなりませんか？　だったら、どちらがあなたにとって重要か考えましょう。それがあなたの価値観です。

毎日勉強できないからといって、試験前に集中的にやっても身につきません。学校の試験は範囲も決まっていて、出題される問題も解き方も事前に分かっているので、一夜漬けが可能なこともあります。でも、それでは遠からず詰むだけです。そこから挽回するのは容易なことではありません。

また、時間を効率的に使うため、たとえば音楽やラジオを聴きながら勉強することがあるでしょう。それでかまいませんよ。なぜなら、勉強に集中できていれば、知らないうちに外からの音は聞こえなくなっているからです。"ゾーンに入る" とも言いますね。もし、何分経過しても音が聞こえるなら、機器の電源を切りましょう。そのまま勉強しても、何も身につきませんから。

でも、動画を見て勉強することは控えた方がよいでしょう。なぜなら、動画は "あなたのペースで進行していない" からです。もし、あなたのペースと異なるのに『分かりやすくてよい』と思えたなら、動画が大変優れている可能性より、あなたがすでに知っている可能性の方が高いからです。知っている内容なら聞き流して

も理解できるのは当然です*2。学習内容をきちんと身につけたければ、自分の手と頭を十分働かせて勉強しましょう。

*2 したがって、自分の理解度を確認するために動画を活用するのは理にかなっています。