正の数と負の数

数について

授業で習う正・負の数の計算は、おそらく負の数の計算が日常的でないという理由で、日常生活に関連がある例を引き合いに出すことがあります。また、数学の無機質な面を強調しすぎると、数学アレルギーを助長することになると考え、そのような措置をとるのかもしれません。しかし、とくに数学に拒否反応がなければ、

無機質であっても、正確な数学の扱いに慣れるべき

なのです。そこで、ここではあまり授業では触れない点に着目して正・負の数を導入してみましょう。

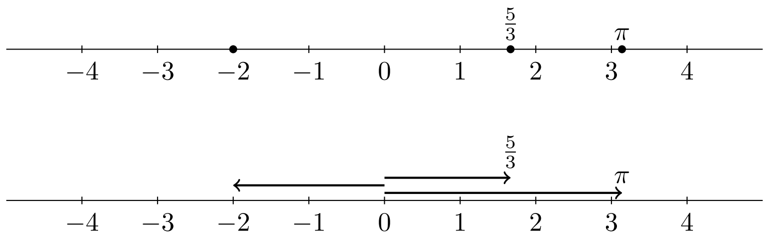
まず、**数**とは何でしょうか。数は生活のあらゆる場面で、ものごとを客観的かつ正確に特徴づけるために使われています。あらためて数とは何かと聞かれても困りますよね。しかし、

数とは、人間の頭の中だけにある数

なのです。禅問答みたいなことを書きましたが、数には実体がありません。だから数は、人によって $1, 2, 3, \ldots$ とか、$*, **, ***, \ldots$ とか、いろいろなイメージがあると思います。でも数学では

数は、数直線上に表されたベクトル

と捉（とら）えるのが一般的です。もし、授業で数を**数直線上の点**で表していたなら、それらはすべて**原点** 0 **（零）から延びるベクトル（矢線）**であると見直しておきましょう（下図において、本来ベクトルは数直線に重ねるのですが、見づらいので上へずらして描きました)。



さて、数が視覚的に見える状態になったところで、数に “性格” を付与しましょう。性格というのは

ある一つの数は、負の数、0、正の数のいずれかである

のことです。これは、数を数直線上で考えたとき原点 0 を基準にして、原点の左にある数を**負の数**、原点の右にある数を**正の数**と呼ぶことにするのです。0 は負でも正でもありません。また日常的に、0 は “何もない” こ

とと結びつけられますが、数学において 0 は物質的な意味はなく、0 というものを**定義**したに過ぎません。

一般に、負の数には**符号** $-$ をつけて $-2,\ -\dfrac{4}{7},\ -\pi$ のように、正の数には符号 $+$ をつけて $+2,\ +\dfrac{4}{7},\ +\pi$ のように表します。正の数の符号 $+$ は省かれることがほとんどですが、まずはこの定義で話を進めます。

継ぎ足し算

さて、数が数直線上のベクトルであると理解できたら、次は数（ベクトル）の計算です。ベクトルの計算と聞いて身構える必要はありません。あなたはすでに数の四則計算はお手のものでしょう。同じように計算してよいのです。ただベクトルの場合、足す・引くの計算は足す（継ぎ足す）計算しかないと心得ましょう。

たとえば $-6,\ -2,\ +9,\ -5,\ +8$ が与えられて計算を行うとき、足す計算しかなければ

$$(-6)+(-2)+(+9)+(-5)+(+8)$$

とするより他にありません。( ) は、**演算記号**である $+$ と、符号である $+,\ -$ を分けるため、もしくは各々（おのおの）の数をはっきりさせるためにつけます。数学では ( ) の扱いはとても大事なので正確に使いこなせるようにしたいものです。

ここで重要な定義を述べます。いま、各々の数を演算記号 $+$ でつないだ式を書きましたが、

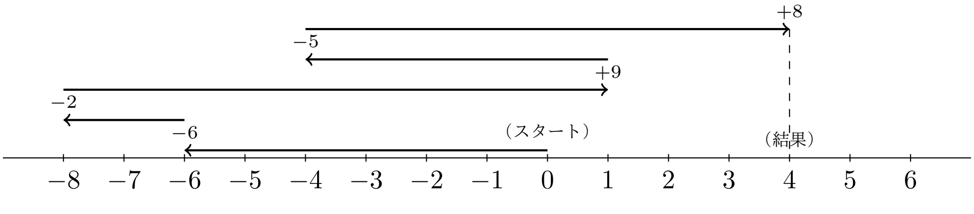
演算記号 $+$ でつながれた、各々の数・式を項と呼ぶ

ことにします。**項**は式を構成する要素として大変重要な考えなのに、おそらく授業ではあまり注意を向けられなかったかもしれません。授業は、中程度の生徒や試験にとって重要なことは強調するものの、数学的に重要なことは存外ないがしろにされるものです。あなたはそれに惑わされないよう気をつけなくてはなりません。

項が重要であることは、数がベクトルであることに関係しています。それは先の計算式がベクトルで

$$(\xleftarrow{-6})+(\xleftarrow{-2})+(\xrightarrow{+9})+(\xleftarrow{-5})+(\xrightarrow{+8})$$

を意味するからです。その上で、足し算が継ぎ足し算であることから



とします。$(-6)+(-2)+(+9)+(-5)+(+8)=+4$ となりました。

継ぎ足し算の性質から、継ぎ足すベクトルの順番は入れ替えられます。そこで、数直線を利用せず数値のまま計算をするのであれば、同符号の項をまとめた上で、

$$\boxed{\text{同符号の足し算は、その符号のまま数値が増える}}$$

ことを利用して

$$(-6)+(-2)+(+9)+(-5)+(+8)=\overbrace{(-6)+(-2)+(-5)}^{\text{負の数}}+\overbrace{(+9)+(+8)}^{\text{正の数}}=(-13)+(+17)$$

とすればよいのです。負の数をまとめた -13 と、正の数をまとめた $+17$ については

$$\boxed{\text{異符号の足し算は、互いの原点からの距離の差に、距離が大きい方の数の符号をつける}}$$

ことで、$(-13)+(+17)=\underset{+}{^{(17\text{ の符号})}}|17-13|=+4$ を求めることは容易にできます[*1]。

あなたが小学校で身につけた計算方法を変える必要など何もありませんね。であれば、分数や小数が混在した計算式であっても問題ないでしょう。しかし、計算式は常に正・負の数を明確に分離して書かれるわけではありません。数学ではよく、**習慣による省略**が行われることに注意しましょう。

もし、数がベクトルの足し算しかしないことが暗黙の約束であれば、項だけ並べて書いた式

$$-6-2+9-5+8 \quad \text{は} \quad (-6)+(-2)+(+9)+(-5)+(+8) \quad \text{を意味する}$$

ことは明白です。$-6-2+9-5+8$ と書くと足し算と引き算が混ざった計算に見えますが、実際はベクトルの継ぎ足し算です。ここに注意すれば、あとは慣れの問題なので難しいことは何もありません。

掛け算

足し算の次は掛け算を扱いましょう。掛け算には足し算の延長の意味があるので、たとえば

$$\overbrace{2+2+2+2+2}^{5\text{ 個}}=2\times 5_{(\text{個})}=5_{(\text{個})}\times 2$$

と見直すことができます。小学校において掛け算の習い初めなら、掛ける数と掛けられる数を区別するのでしょうが、掛け算で数の交換は可能なので

$$(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)=(-2)\times 5=5\times(-2)=-10$$

であることもよいですね。この例から、正の数と負の数の**積**は必ず負の数になることが分かります。授業では負の数を含んだ掛け算を日常の事柄に結びつけて、掛け算の規則

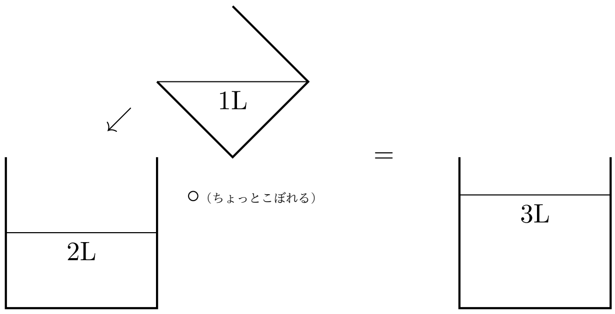
$$\boxed{\text{(正)}\times\text{(負) または (負)}\times\text{(正) の符号は、必ず (負)}}$$

[*1] **距離**とは "正の値で示される量" と定義されるので、-13, $+17$ の原点からの距離はそれぞれ 13, 17 で、距離の差も正の値となるよう $17-13$ で求める。

を確認したかもしれませんが、本来は考え方が逆です。すなわち、

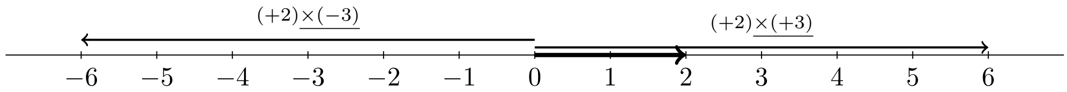
数学の規則が正当であるとみなせる事柄に、数学の規則を適用した

に過ぎません。正当でないことがらに適用することはできないのですから。たとえば数学では $2+(1-0.002)\neq 3$ ですが、日常の中では、これは



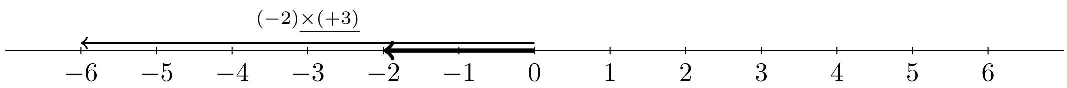
$2+(1-0.002)=2\text{L}+(1\text{L})=3\text{L}$ とみなしています。また、(りんご 2 個) + (林檎 1 個) = (リンゴ 3 個) なども、多少の違いなら $2+1=3$ とみなしていますね。日常感覚では正常なのです。

問題は負の数どうしの掛け算の符号がどうなるかです。(負) × (負) の計算は日常の中では一般的ではありません。しかし数学的には、はっきりさせたいのです。これは、数がベクトルであることから導かれます。たとえば、$+2$ に対して $\underline{\times(+3)}$ を行う場合（結果は $+6$）と、$+2$ に対して $\underline{\times(-3)}$ を行う場合（結果は -6）を数直線上で見ましょう。



一般に、正の数に正の数を掛けると、掛けられる数 $+2$ と結果である $+6$ のベクトルの向きは同じ方向、正の数に負の数を掛けると、掛けられる数 $+2$ と結果である -6 のベクトルの向きは逆方向になります。

今度は -2 に対して $\underline{\times(+3)}$ を行う場合（結果は -6）を数直線上で見ましょう。



一般に、負の数に正の数を掛けると、掛けられる数 -2 と結果である -6 のベクトルの向きは同じ方向になります。ここまでに共通することは何でしょう？　それは、掛けられる数の正・負に関わらず、

正の数を掛けると、計算結果のベクトルの向きは、掛けられる数と同じ方向になる

ということです。そこで $(-2)\underline{\times(-3)}$ を考えたいのですが、負の数を掛けることに共通することがあれば、そ

れは $(+2)\underline{\times(-3)} = -6$ で見たように

$$\boxed{\text{負の数を掛けると、計算結果のベクトルの向きは、掛けられる数と逆方向になる}}$$

ということでしょう。これは**帰納的に得られる結論**—いくつかの事実から共通する性質を取り出した上で推測されること—ですが、このことから

$$\boxed{\text{（負）}\times\text{（負）の符号は、必ず（正）}}$$

と**定める**のが理にかなっています。“そうなる” のではなく “そう決める” のです。これも授業では日常と結びつけて結論づけたでしょうが、数学的には**定義**と言えるものです。実際は定義ではなく、別の方面から掛け算を考えると（負）×（負）が（正）であることは必然だと結論されます。そのことは高校数学で学びますが、たとえば $(-1)\times(-1)=(+1)$ が妥当であることは、等式の性質と $1\cdot a = a$ と $0\cdot a = 0$ との約束から

$$\begin{array}{rcll}
(-1)+1 & = & 0 & \text{（正しい等式）} \\
(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-1) & = & 0\cdot(-1) & \text{（等式の性質：両辺に } (-1) \text{ を掛けてよい）} \\
(-1)\cdot(-1)+(-1) & = & 0 & \text{（約束による計算結果）} \\
(-1)\cdot(-1)+(-1)+1 & = & 0+1 & \text{（等式の性質：両辺に 1 を足してよい）} \\
(-1)\cdot(-1) & = & 1 & \text{（正しい等式）}
\end{array}$$

のように確認することはできます。

四則計算

ベクトルの計算に引き算はなく、項の継ぎ足し算だけがあると言いました。しかし、引き算にしか見えない式はあります。たとえば $(+5)-(-2)$ などです。ですが、これも演算記号 $+$ を省いて項だけを並べた式です。つまり $(+5)+\{-(-2)\}$ のことです。

では、$-(-2)$ は何を表すのでしょう。数学ではよく 1 を省略する習慣があります。実はこの式も習慣にしたがい 1 が省略されています。つまり $-1(-2)$ のことです。さらに記号 $\times$ も省略されています。$+$ でなく $\times$ の省略と断言できるのは、$-1(-2)$ が項だからです。項は演算記号の $+$ でつながれたものをバラバラに見たものなので、項には演算記号の $+$ は含まれていません。項の考え方は重要ですね。であれば

$$(+5)-(-2) \quad \overset{+\text{の省略}}{\longleftarrow} \quad (+5)+-(-2) \quad \overset{1,\times\text{の省略}}{\longleftarrow} \quad (+5)+(-1)\times(-2)$$

のような省略がなされた式であることが分かるでしょう。すると

$$\boxed{\text{掛け算・割り算は、足し算・引き算より優先される}}$$

規則によって、$(+5)-(-2)=5+2=7$ となることは**自明**のことです。

以上のことが身につけば、正・負の数の計算式が複雑に見えても何ら困ることはないはずです。一番スッキリするのは、( ) を含まない項だけの式にすることです。たとえば、

$$-17-(-2)\times 4-22-6\times(-3) \quad\rightarrow\quad -17\ \ +8\ \ -22\ \ +18 \quad\rightarrow\quad +8+18\ \ -17-22$$

のように見ればよいのです。しかし、計算の仕方の細かい感覚は人それぞれなので、無理に ( ) を含まない項だけの式にしなさい、と言うつもりはありません。

正・負の数の計算は数学の根幹なので、授業ではことさら丁寧に指導するものです。でも、順を追って足し算・引き算・掛け算・割り算のあと四則計算と進むより、小学校で身につけた各人それぞれの計算方法はそのままに、負の数の扱いを追加する方が理解しやすい生徒もいるはずです。むしろ授業は、平均的な生徒の平均的な理解力を前提に構成するため、かえってそれに合致するような生徒がいないことになりかねません。

学校の授業は、平均的な生徒をモデルケースに組み立てられます。あなたがモデルケースから離れた生徒ならば、授業はむしろ害になる可能性があります。まったく無視しなさいとまでは言いませんが、先生の『これは試験に出題するから覚えなさい』とか『これはこう覚えるのがよい』などの発言は、すべて “数学難民” 向けの助言と思ってください。できることなら

教科書に書かれたきっちりした内容・手順を、自分の考えで理解するよう努める

ことを優先させましょう。自分で考えることなく、先生の先回りした助言をまる覚えしても数学の力はつかないのです。