三平方の定理

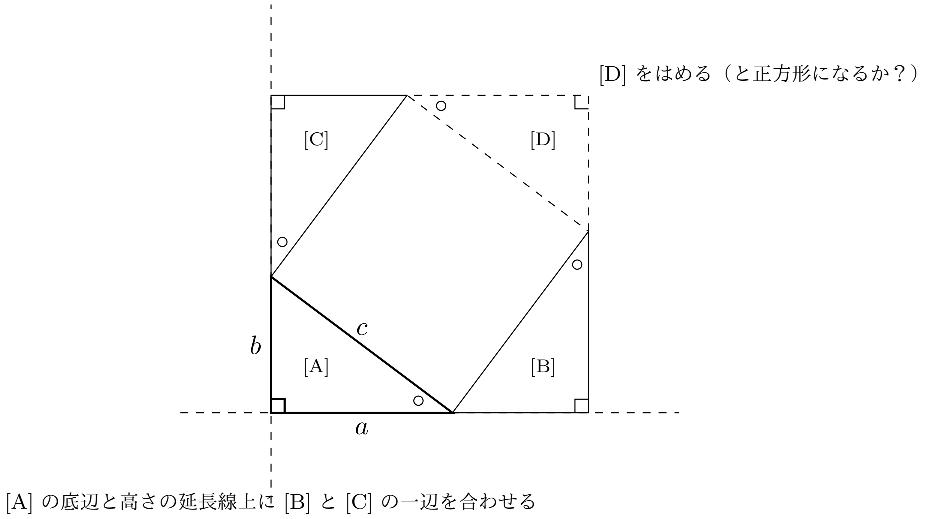
三平方の定理の証明

三平方の定理はピタゴラス[*1]の定理とも呼ばれ、中学数学のまとめ的な位置にあり、同時に高校数学の入り口にもあたります。定理は

$$\boxed{\text{直角三角形の 3 辺 } a,\ b,\ c\ \text{（斜辺）について、常に } a^2+b^2=c^2 \text{ が成り立つ}}$$

というものです。直角三角形について成り立つ等式なので、図形問題を解く必須の道具です。

これは定理なので当然証明を必要とし、実際証明にも触れるはずです。証明方法は代表的なものでも数通りあるようなので、教科書によって異なる証明方法をとっているかもしれません。おそらく授業では、定理の証明より定理の使い方を重視するでしょうから、証明は簡単に済ませるのではないでしょうか。証明方法は数多くあっても、そこから発展することが少ないことも影響しているかもしれません。



代表的な証明の一つは、合同な直角三角形 4 個を図のように組み合わせて定理を示します。外側の正方形（一部破線）は一辺の長さが $(a+b)$ で、内側の正方形（一部破線）の一辺の長さは c です。このとき

$$\text{（外側の正方形の面積）} - \text{（1 個の直角三角形の面積）} \times 4 = \text{（内側の正方形の面積）}$$

の関係が成り立っているので、ここに $(a+b)^2$、$\dfrac{1}{2}ab$、c^2 を代入して整理すると $a^2+b^2=c^2$ になります。

証明はとくに難しいことはないのですが、本当は計算の前に、図のように直角三角形を組み合わせると、外側と内側の四角形が間違いなく正方形であることを示さなくてはなりません。これは簡単に示すことができま

[*1] ピュタゴラス (582B.C. – 496B.C.)：古代ギリシャの数学者・哲学者。

すが、このようなことを疎（おろそ）かにしてはいけないのです。あなたは、そのことをぜひ示してみましょう。示すべきは「外側の四角形の 4 辺が途中で折れ曲がってないこと」と「内側の四角形の 4 角が直角であること」です。

三平方の定理の逆

三平方の定理で、考え方を重視したいものがあります。それは**三平方の定理の逆**です。**逆**というのは、$A \Rightarrow B$ に対して $B \Rightarrow A$（または $A \Leftarrow B$）のことです。授業で図形の証明を扱ったときは、$A \Rightarrow B$ が正しければ $B \Rightarrow A$ も正しいことばかりだったでしょう。

三平方の定理は

$$\triangle\mathrm{ABC}\ \text{が直角三角形} \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=c^2 \quad (※)$$

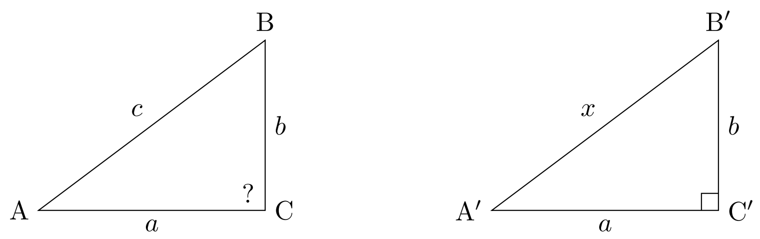
が成り立つことを言っているだけで、その逆の

$$\boxed{a^2+b^2=c^2\ \text{が成り立つ}\ \triangle\mathrm{ABC} \quad \Rightarrow \quad \angle\mathrm{C}=90^\circ}$$

を言っているわけではないのです。このことは、定理が言っていることや証明が伝わりにくいこともあり、もしかしたら授業では逆も含めて三平方の定理として扱っていたかもしれません。でも、三平方の定理の逆の証明を理解することは、数学の考え方を学ぶためには重要だと思うのです。

覚える必要はありませんが、三平方の定理の逆を証明しておきましょう。

[証明]



いま $a^2+b^2=c^2$ が成り立っている $\triangle\mathrm{ABC}$ があると仮定する（左図）。示したいことは ？ $=90^\circ$ だが、いまは定かではない。

次に $\triangle\mathrm{ABC}$ とは別に、2 辺の長さが a, b で間の角が直角である $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ を考える（右図）。ただし、$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の斜辺の長さは c かどうかは分からない。なぜなら $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は、3 辺の長さを決めて描いたのではなく、2 辺の長さと間の角の大きさを決めて描いたものだからである。ただ、いずれも三角形は一つに決まる。しかし $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は直角三角形なのだから、斜辺の長さを x とすると $a^2+b^2=x^2$ は

成り立っている。

さて、はじめの仮定では $a^2+b^2=c^2$ は成り立っている。つまり a^2 と b^2 の和は c^2 なのだから、$a^2+b^2=x^2$ の x は c でなければならない。すなわち $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ においても、$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。したがって $a^2+b^2=c^2$ が成り立つ $\triangle\mathrm{ABC}$ は、a, b の間が直角である $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ と同じもの、すなわち $\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle \mathrm{A'B'C'}$ である。

ゆえに、$a^2+b^2=c^2$ ならば、$\triangle\mathrm{ABC}$ は直角三角形である。（証明終り）

もし、あなたが証明を納得できないとしたら、証明がどういうものか理解が不足しています。

辺の長さが整数値の直角三角形

授業でよく目にする直角三角形は 3 : 4 : 5 や 5 : 12 : 13 などでしょうか。3 辺の長さが m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 の三角形は三平方の定理を満たします。確認は

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2 \quad と \quad (m^2+n^2)^2$$

を計算して見比べるだけです。このような関係式が他にあるかどうかは、きちんと調べなければなりませが、実際はこの式だけです。ただ、証明は少し面倒なので興味が湧いたら調べてみましょう。

さて、少し具体的な値を代入してみます。（辺の長さ）>0 なので、$m>n$ は必須です。

m	n	m^2-n^2	$2mn$	m^2+n^2	
2	1	3	4	5	*
3	2	5	12	13	
3	1	8	6	10	*
4	3	7	24	25	
4	2	12	16	20	*
4	1	15	8	17	
5	4	9	40	41	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

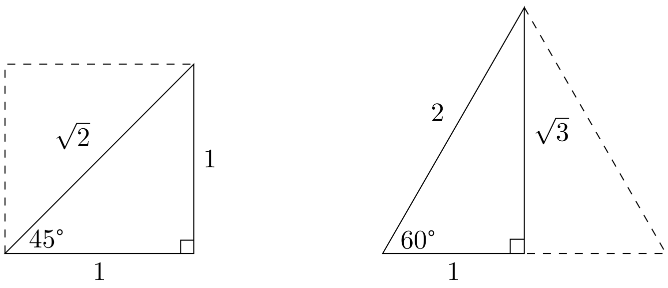
たしかに、どれも直角三角形です。*印はいずれも 3 : 4 : 5 の直角三角形に**相似**なので、本質的に同じ直角三角形です。$(m,\ n)=(4,\ 2)$ の組が、3 : 4 : 5 の直角三角形に対して**相似比**で 4 倍なのは、$(4,\ 2)$ が $(m,\ n)=(2,\ 1)$ の 2 倍だからです。m, n を用いた計算式はどれも 2 乗しているか、積が次数 2 のため、$(m,\ n)$ の組が 2 倍になれば $(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$ の組は 2^2 倍になるのです。

しかし、$(3,\ 1)$ の組は $(2,\ 1)$ の組の倍数ではないのに、辺の比は 2 倍になっています。理由は 3 辺の組を $((m+n)(m-n),\ 2mn,\ m^2+n^2)$ と見れば分かります。$2mn$ は偶数であり、$(m,\ n)=(3,\ 1)$ は奇数の組だから $(m+n)(m-n)$ と m^2+n^2 は偶数になります。ただ、確実に 4 の倍数になるのは $(m+n)(m-n)$

だけで、他は 2 の倍数でしかありません。結果、辺の比は 2 倍となるのです。

三角定規の直角三角形

三平方の定理を使えば、直角をはさむ 2 辺の長さが分かれば斜辺の長さも分かります。代表的なものは $1:1:\sqrt{2}$ と $1:2:\sqrt{3}$ でしょう。この形は三角定規の形であり、また正方形や正三角形を半分にしたものです。これらが重宝されるのは、直角以外の角度が 45°, 45° および 30°, 60° になるからです。辺の長さは簡単な比、角度は整数値となる直角三角形は他にありません。たとえば $3:4:5$ の直角三角形は、直角以外の角度は整数値ではありません。



直角以外の角が一つ定まれば、直角三角形（の辺の比）が決まる

たとえば直角以外の角の一つが 60° であれば、$\sqrt{3}:1:2$ の直角三角形であることが確定します（後の都合で比の順番を入れ替えました）。直角三角形を前提に議論しているのであれば

$$60^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}:1:2$$

という**対応**を考えてよいのです。しかし、この事実を数式で扱うには、**連比**は扱いづらいものです。連比は

$$l:m:n \quad \text{を} \quad l:m\left(=\frac{l}{m}\right) \text{かつ } m:n\left(=\frac{m}{n}\right) \text{かつ } l:n\left(=\frac{l}{n}\right) \quad \text{として見たもの}$$

と考えます。$l:m=\dfrac{l}{m}$ とする見方は、おそらく英語の読み方と関係があるのでしょう。たとえば $2:3$ は英語で "2 to 3" ですが、意味は "3 に対しての 2（についての言及）" だと思います。この場合、2 は単に 2 ではなく、3 分割のうちの 2 なので、日本語では "3 分の 2" と縮めて読むのが自然です。

一方、英語で "2 to 3" と読み書きした場合、"2 to 3" $\to 2/3 \to \dfrac{2}{3}$ と書き直すことはまったく自然なことです。当然 $\dfrac{2}{3}$ も分子から読んで "two-thirds" もしくは "two over three" と読みます。

分数の記述を自然な形で書くなら日本語での対応は "3 分の 2" $\to 3/2$ としたいところですが、すでに英語圏で "2 to 3" $\to 2:3 \to 2/3 \to \dfrac{2}{3}$ の流れが定着していたので、やむなく「分数は分母から先に読む」としたのでしょう。

さて、そこで

$$60^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}:1:2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \text{ かつ } \frac{1}{2} \text{ かつ } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

という対応に読み替えれば、連比を "比の値の組" として扱えます。これが**三角比**の考えのもとです。

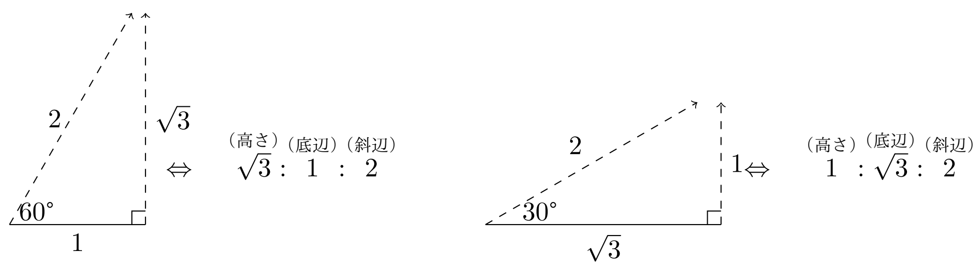
三角比の入口

三角比は高校数学の単元なので、ここでは入口からのぞく程度の話をします。三角比はその名が示す通り、直角三角形の比にまつわる関係を表します。その際、

$$\boxed{\text{直角三角形の、一つの角の値と 3 辺の比は、一対一対応している}}$$

ことが重要です。先の例なら $60^\circ \Leftrightarrow \sqrt{3}:1:2$ であり、また他の例を示せば $3:4:5 \Leftrightarrow (36.86989765\cdots)^\circ$ などがあります。しかしこの書き方は、連比が扱いづらい以上に $\sqrt{3}:1:2$ の比は他に 30° とも対応していて、$3:4:5$ の比も他に $(53.13010234\cdots)^\circ$ とも対応していることが問題です。これでは一対一対応とは言えません。

そこで、一つの角から連比が**一意に決まる**ようにするため、両端に特定の角と直角を持つ辺を底辺とする三角形を考え、連比を（高さ）:（底辺）:（斜辺）の順で表すことにします。そうすれば、特定の角が 60° と 30° では別の対応を表し、一つの角と連比が一対一対応になります。

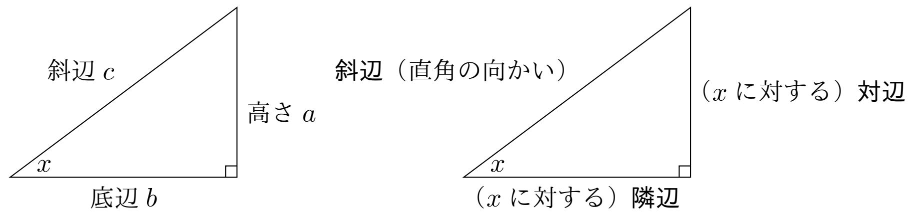


しかし、一つの角と連比が一対一対応になったとはいえ、連比は 3 種類の比を含むので、実際は一つの角に三つの比が対応してよくありません。そのため、きちんとした定義を導入する必要があります。

三角比の定義

前節はただの "お話" と思って頭の片隅に埋めておきましょう。きちんとした定義を述べます。

直角三角形は、一つの角 x と直角ではさまれた辺を底辺とすると、直角三角形がただ一つ定まります。決定条件は、「一辺と両端の角が決定した」ことによります。



つまり、3 辺の連比が定まりますが、ここから 2 辺一組の比が 3 種類得られます。このとき、それぞれの比を区別するために固有名称をつけ、

・比 $b:c\left(=\dfrac{b}{c}\right)$ を、角 x に対する余弦、と呼ぶ：　$\dfrac{b}{c}=\cos x$
・比 $a:c\left(=\dfrac{a}{c}\right)$ を、角 x に対する正弦、と呼ぶ：　$\dfrac{a}{c}=\sin x$
・比 $a:b\left(=\dfrac{a}{b}\right)$ を、角 x に対する正接、と呼ぶ：　$\dfrac{a}{b}=\tan x$

と定義します。cos 等の記号を用いた等式が、高校で学ぶ三角比の定義です。ただ、“底辺”、“高さ” は三角形の “置き方” によって意味が曖昧になるので、実際は右図のように特定の角 x を基準とする名称にします。

三角比は**三角関数**とは別物です。表面的に似ているため、学校によっては三角比の単元の直後に、続けて三角関数の学習に入る場合があるようです。しかし、これは少々無理があるのも事実です。**幾何学の世界**を一気に**関数の世界**に昇華させるので、考え方の転換が必要です。このことを知らせないまま三角比 → 三角関数を続けた場合、生徒は少し災難ですね。