文字式

文字式の約束

数式において、文字を使うときは**約束**がありました。基本的な約束は次の三つでしょう。

- 演算記号 $\times$ は省略し、数値と文字の積は数値を先に書く。

  （例） $a \times b \to ab,\quad x \times (-2) \to -2x,\quad m \times (-1) \to -m$（数字 1 は省略する）　など
- 同じ文字の積は**指数**を用いて表す。

  （例） $a \times a \times a \to a^3,\quad x \times y \times x \to x^2 y,\quad (m-n) \times (m-n) \to (m-n)^2$　など
- 演算記号 $\div$ は使わず、分数または積の形で表す。

  （例） $a \div b \to \dfrac{a}{b},\quad x \div 3 \to \dfrac{x}{3}$ または $\dfrac{1}{3}x,\quad \dfrac{m}{n} \div \dfrac{a}{2} \to \dfrac{2m}{an}$　など

これらの約束は、単に約束であって**定義**ではありません。たとえば、式変形の途中では $x \times 5$ を $x \cdot 5$ のように書くこともあります。また、いくつかの文字の積ではアルファベット順に書く習慣がありますが、公式などでは $f = ma$ のように必ずしもアルファベット順に書かないこともあります。だから、記述の仕方は緩（ゆる）めの習慣にしたがうぐらいの意識でよいでしょう。

しかし、( ) の使い方は厳密に理解しておく必要があります。その前に、数式の基本となる**法則**を挙げます。

・**交換法則：**	[和] $a+b=b+a$、[積] $ab=ba$
・**結合法則：**	[和] $(a+b)+c=a+(b+c)$、[積] $(ab)c=a(bc)$
・**分配法則：**	$a(b+c)=ab+ac$、$(a+b)c=ac+bc$

交換法則なんて当たり前だと思うでしょうが、式の和や積が足したり掛けたりする順によらないことは、交換法則によって保証されているのです。また、結合法則は ( ) の場所に注意してください。これだけ見れば ( ) は要らない、つまり $a+b+c$ や abc でいいじゃない？と思うでしょうが、考える順が逆です。結合法則の保証があるから ( ) を使わなくてもよいのです。授業では、こんな些細（に見えるが重要）なことには触れないものですが、数学をきちんと理解するためには大切なことです。

さて、( ) には重要な役割があります。計算の順序を変える、もしくは計算を優先させる目的の他に、

$\boxed{\text{( ) は 1 文字と同等}}$

に扱えることは大事な役割です。計算が得意な人にはなんでもないことでしょうが、数学が苦手な人は、こういった細かく正確な約束が身についていないものです。

また、文字式は数式である意識が薄い人も困ったものです。文字は最終的に数値を当てがって計算されるのですが、その際、値が固定されている文字は**定数**、**任意の値を代入**できる文字は**変数**として区別されます。この違いを意識できないのも問題です。これは大事な感覚なので、**習慣として**定数には a, b, c, ... を、変数には ..., x, y, z を使う工夫をしているのですが ...。もし、$ax+by=c$ と $ab+xy=c$ が似た式に見えるなら、数学の準備が整っていないと言わざるを得ません。これらは $2x+3y=4$ と $6+xy=4$ のごとく、まったく性質が異なる式なのですから。

足し算・引き算

文字式の約束に含めてもよかったのですが、足し算は掛け算に直せる場合があります。たとえば $a+a+a=a\times 3=3a$ のように。このことから**一般**に同じ文字の足し算は

- 足される個数を**係数**として、積の形で表す。

ようにします。この場合 "同じ文字" とは "同じ個数の文字の積"、つまり項を指すので、たとえば $x^2y+x^2y=2x^2y$ です。

また、交換法則や結合法則に見られるように、法則中では + の演算記号だけが使われています。これは

$$\boxed{\text{法則は項に対して成り立つ}}$$

ことを意味します。項を + でつないでないもの、たとえば $a-b$ については法則を適用できません。この場合なら $a+(-b)$ とした上で法則を適用するのです。ここでも項の考えは重要ですね。

では、計算式 $a-(b+c)$ を考えてみましょう。このような計算は、270 円と 155 円の品物を買って 500 円玉を出したときのお釣り $500-(270+155)$ など、ごく普通に行われる計算です。( ) の計算を優先するので先に $270+155$ を計算しますが、$a-(b+c)$ はそうできません。法則を適用するなら $a-(b+c)$ は $a+\{-(b+c)\}$ とします。では、項 $-(b+c)$ はなんでしょうか。

習慣として 1 を省略したり、約束として × を省いているので、$-(b+c)=(-1)\times(b+c)$ です。これは分配法則により

$$(-1)\times(b+c)=(-1)\times b+(-1)\times c=(-b)+(-c)=-b-c$$

になります。このように、決められたことだけを忠実に適用すれば $-(b+c)=-b-c$ であることは明白なことです。そして、一度このことが分かれば

$$a-(b+c)=a-b-c$$

であるのは紛れもないはずなのに、なぜか自分勝手に間違った式にする人がいるのはどうしたことでしょ

うか？

約分

分数は約分できることがあります。小学校では何気なくしていたことも、文字式では注意が必要です。そもそも約分とは、$\dfrac{\text{分子}}{\text{分母}}$ のとき分子と分母に共通する**約数**、つまり割り切ることができる数があれば、分子・分母とも共通する数で割ることです。たとえば $a,\, b$ に共通の約数があり、その約数で割ると $a \to a',\, b \to b'$ になるとしたら $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ にできるのです。約分とは分子の 1 文字と分母の 1 文字に対して行われています。

こういうことを理解できない人が、$\dfrac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = x$ だから $\dfrac{\cancel{a}+x}{\cancel{a}} = x$ などと平気でやってしまうのです。あなたはそうでないとしても、なぜダメなのかの理由を説明できなければなりません。理由は記述の約束にあります。

$$\boxed{\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}\quad\text{であり、}\dfrac{a+b}{c}\quad\text{は}\quad(a+b)\times\dfrac{1}{c}\quad\text{を意味する}}$$

この例からは気づきにくいのですが、分数の線は ( ) を兼ねています。そのため、たとえば $-\dfrac{a+b}{2} \neq \dfrac{-a+b}{2}$ であることは明らかですね。なぜなら

$$-\frac{a+b}{2} = -\frac{(a+b)}{2} = \frac{(-1)\cdot(a+b)}{2} = \frac{-a-b}{2}$$

が正しいからです。$-$ を書く位置が重要なのですね。分数の線が ( ) を兼ねているので

$$-\frac{a+b}{2} = -\left(\frac{a+b}{2}\right) = (-1)\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) = -\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

と見ても同じことです。結局、$-\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{-a-b}{2} = -\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}$ ですが、こういったことは丁寧に計算を繰り返すうちに自然と身につくものなのです。

分数の約分について整理しましょう。まず、約分は

$$\boxed{\text{単項式の分子・分母にある、共通因数を消去すること}}$$

です。これを定義と考えると、それ以前に**単項式、分子・分母、共通因数**の意味が正確に分かっていなくてはなりません。

$$\boxed{\text{単項式とは、一つの項で表された式}}\qquad\text{（※）}$$

のことです。単項式を和の形にした式、すなわち $+$ でつないだ式は**多項式**といいます。具体的に

$$4x^2,\quad -\frac{2}{3}ax,\quad 7\quad\text{は単項式、}\quad 4x^2-\frac{2}{3}ax+7\quad\text{は多項式}$$

です。多項式から**項**を抜き出せば、それは単項式です。7 も立派な式ですが無理に式を意識しなくてもよいでしょう。**定数項**と言うのが一般的です。

分数は一つの項で表されているので単項式です。$-\dfrac{2}{3}ax$ を一つの分数と見た場合は $\dfrac{-2ax}{3}$ とも $\dfrac{2ax}{-3}$ ともとれますが、いずれにせよ多項式の中では $+\left(-\dfrac{2}{3}ax\right)$ の扱いになります。

で、問題となるのが $\dfrac{(a+b)h}{2}$ のような場合です。この式は（※）に合致するので単項式です。$a+b$ があるから多項式ではないかと考えるのは間違い、というより甘い認識とでも言いましょうか。数学で ( ) を使う理由は、一つにまとめたいからです。つまり $(a+b)$ は 1 文字に相当するので、$\dfrac{(a+b)h}{2}$ と書けば単項式、展開して $\dfrac{ah}{2}+\dfrac{bh}{2}$ と書けば多項式の認識です。

このようなことは改めて覚えたりすることではなく、たくさんの計算練習をしながら身につけるべきものです。たとえばスポーツにおいて、ある一連の動作が頭で考えることなく自然と体が動くような感じです。体感で身についているというのは、たとえば

$$\frac{6x-9}{3}=\frac{\cancel{6}^{\,2}x-\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{3}_{\,1}}=2x-3 \quad \text{（※※）}$$

とすることです。この操作は、いま述べた約分の定義に当てはまっていません。約分の定義通りなら

$$\frac{6x-9}{3}=\frac{3(2x-3)}{3}=\frac{\cancel{3}^{\,1}(2x-3)}{\cancel{3}_{\,1}}=2x-3$$

でなくてはならないはずです。しかし忠実に約分をした結果、分子・分母の 6, 9, 3 を同時に 3 で割ったように見えます。数学では

正しい性質を用いた結果そう見えるのなら、そうしてよい

ので、（※※）は正しいのです。でも、中途半端に真似る人は正しい感覚が身につかないため

$$\frac{\cancel{6}^{\,2}x-9}{\cancel{3}_{\,1}}=2x-9 \quad \text{や} \quad \frac{{}^{\text{消える}}\cancel{3}x-\cancel{3}^{\,\text{消える}}}{\cancel{3}_{\,\text{消える}}}=x$$

のようなことを平気でやるものです。

文字式に限った話ではないのですが、参考書や問題集などの解説・解答にある式変形を見て、途中式が端折（はしょ）ってあるとき、なぜこの式変形になるか分からないことがあるでしょうか。だとしたら、明らかに勉強不足です。いくら

紙面の都合で端折ってあると言っても、考えれば気づく範囲で省略してある

場合がほとんどのはずだからです。

指数法則

文字式の約分には**指数法則**の理解が欠かせません。掛け算や割り算において、たとえば

$$a^3 \times a^2 = (a \cdot a \cdot a) \times (a \cdot a) = a^5 、\quad \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a$$

の例からも推察できるように

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n} 、\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

です。これで文字式に**指数**が使われていても、簡便に計算を進められます。ただ、割り算においては注意が必要です。それは、たとえば $\dfrac{a^2}{a^3} = \dfrac{1}{a}$ なので、$\dfrac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$ としてしまうと『a を -1 個掛けるって何？』となりかねません。しかし指数が負の数になる場合、他に $\dfrac{a^2}{a^5}$ の計算からも分かるように、a^{-3} は正しくは $\dfrac{1}{a^3}$ なので、負の指数と分母の指数には一貫性があります。指数の絶対値は等しいのです。そこで

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)}$$

という**記述上の約束**を取り付ければ、負の指数は堂々と使えます。解釈を広げて、指数法則を**拡張**できたわけです。

ただ、一点注意が要ります。$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ は分数に関する法則ですから、$a \neq 0$ は当然のことです。この場合は分数が“見えている”ので $a \neq 0$ はすぐ気づきますが、単に a^{-n} と書かれた場合は気づかないかもしれません。常に“コトの始まり”を意識しましょう。

定義や定理の拡張は、無条件に拡張されるわけではない

ことは肝に銘じておきましょう。ちなみに、拡張することで条件が緩和されることもあるのですが、それは高校から先の勉強になります。

蛇足ながら、a^n は『a を n 個掛ける』とも『a を n 回掛ける』とも言います。より正しい表現は『n 個』の方でしょうか。$a \times a \times a$ なら $\times a$ は 2 回ですから。でも $n = 1$ のときは単に a なので『掛ける』というのも変です。そこで

$$\boxed{a^n \text{ は、1 に } a \text{ を } n \text{ 回掛ける（}a^n = 1\overbrace{\underline{\times a}\cdots\underline{\times a}}^{n\text{ 回}}\text{）}}$$

と表現すれば完璧です。$n = 1$ にも $n \geq 2$ にも適合した表現です。さらに $n = 0$ の場合は『a^0 は、1 に a を 0 回掛ける』意味となり 1 で間違いありません。実際、$a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$ です。途中、分数計算になるので、もちろん $a \neq 0$ の条件がつきます。

さらに、負の値は『反対の表現』を意味することがあります。たとえば『東へ -10m 進む』は『西へ 10m 進む』、『-10 万円の利益』は『10 万円の損失』のように。このことから『掛ける』の反対表現を『割る』と捉えれば、a^{-1} は『1 に a を -1 回掛ける』、すなわち『1 を a で 1 回割る』なので $\dfrac{1}{a}$ です。うまくいきました。