平方根

平方根の定義

平方根、いわゆる “ルート” は中学数学での鬼門かもしれませんが、避けて通ることはできません。ロクな目に遭わないために、きちんと押さえておきましょう。だいたいの導入は次のようなものでしょうか。

> 2 乗して 4 になる数は 2 および -2 である。また、2 乗して 9 になる数は 3 および -3 である。2 乗して a になる数を「a の平方根」と呼び、いまの例なら、「4 の平方根は 2、-2」「9 の平方根は 3、-3」であるという。正・負の数をまとめて書いて「4 の平方根は ± 2」ということもある。
>
> 16 や 25 などは平方根がすぐ見つかる一方で、6 の平方根、すなわち 2 乗して 6 になる数は容易に見つからない。たとえば $2.4^2 = 5.76$、$2.5^2 = 6.25$ だから、2.4 と 2.5 の間の数なら 2 乗して 6 になりそうだ。$2.45^2 = 6.0025$ なので 2.45 より少し小さい数なら ... などと試行錯誤して探しても、ちょうど 6 になる数は特定できない。そこで 2 乗して 6 になる（正の方の）数を $\sqrt{6}$ で表す。すなわち $(\sqrt{6})^2 = 6$ である。一般に、**2 乗して a になる（正の方の）数を $\sqrt{a}$ で表す。**

こんな感じで授業は進むでしょうか。授業を頼りに勉強していると、平方根の考えに正しく慣れるのは簡単ではありません。そのため、4 の平方根が ± 2 で、平方根を表すために用いる**根号**が $\sqrt{\ }$ であることから、$\sqrt{4} = \pm 2$ などの勘違いをする人もいます。授業は数学が苦手な生徒のために、どうしても感性に頼る説明が入り込みます。だから、正確な理解の妨（さまた）げになることもあるでしょう。あなたがそうならないためにすべきことは、少し大変でも、数学のことばできちんと理解することが大事です。平方根の正確な理解は、以下のようなものでしょうか。

正の数 a の平方根とは、
・2 乗して a になる数のことで、正の値と負の値の 2 個ある
・それを根号を用いて $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$ で表す
・また、0 の平方根は 0、負の数の平方根はない
（例） 4 の平方根は $\sqrt{4}\ (=2)$ と $-\sqrt{4}\ (=-2)$、 6 の平方根は $\sqrt{6}$ と $-\sqrt{6}$

平方根のように、いままでに経験のない考えを身につけるのは、どんな人にとっても難しいものです。だから、どのような導入であっても苦労するのは当たり前。他人に頼らず、自分の力できちんと理解できるよう努めましょう。

平方根の性質

授業では、平方根の性質として

- 足し算、引き算は文字式の同類項にならって、$\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$、$2\sqrt{5}-4\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$ など。
- 掛け算、割り算は一つの根号にまとめて、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$、$\sqrt{10}\div\sqrt{2}=\sqrt{5}$ など。

のような計算例を通して学んでいくでしょう。ルートの計算は、今後あらゆる場面で登場するので、まず計算に習熟する必要があります。試験や受験を考えればそれで十分でしょうが、数学の能力を高めるのであれば、それでは不十分です。まず、正しい知識として

$$\boxed{m\sqrt{a}+n\sqrt{b}=(m+n)\sqrt{a}\text{、}\quad \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}\text{、}\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

を覚えて使いこなせることは必要です。しかし、それだけでは単に "計算機" になったに過ぎません。数学的に考える力を高めないと、いずれ壁に当たります。中学校の授業では不要なことかもしれませんが、なぜ『$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$』、『$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$』であるかを、数学的な見地から理解するのはよいことです。

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ であることはすぐ分かります。両辺を 2 乗すればよいのです。すると、左辺 $=a+2\sqrt{ab}+b$、右辺 $=a+b$ から違いは明らかです。

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ が正しいことは、やはり両辺を 2 乗すれば明らかですが、それは「正しいことを確認した」に過ぎません。この性質が成り立つことを数学的に導いてみましょう。まず、

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=(ab)\quad(*)$$

です。最後を (ab) と書いたことに注意してください。文字式では a と b の積は ab と書くしかありませんが、実際の数値なら、たとえば 2 と 5 の積は 10 であり $2\cdot5$ のままにはしません。一つの数値であることを強調するために (ab) と書きました。でも一つの数値を意識できたでしょうから、以下 ab と書きます。

さて、ここからが数学的な考え方です。$(*)$ の左辺は $\sqrt{a}\sqrt{b}$ を 2 乗していて、その結果、右辺の ab に等しいことが分かりました。定義より「2 乗して ab になるものが ab の平方根」で、その正の方を $\sqrt{ab}$ と書くのでしたね。ところで、実際 2 乗して ab になったのは左辺の $\sqrt{a}\sqrt{b}$ でした。このことから $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は $\sqrt{ab}$ と書かれるべきものです。だから $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ なのです。

平方根の計算

平方根の計算は、性質にしたがって整理していけばよいのですが、重要な性質がもう一つあります。それは

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

であることです。$(\sqrt{a})^2 = a$ との違いに注意しましょう。記号 $|\ |$ は**絶対値**を意味するもので、a の正・負に関わらず $|a|$ は正の値になるということです。普段はこれでよいのですが、このことを数式で表そうとすると思いの外（ほか）面倒で

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}}$$

と書きます。$-a$ は正の数であることに注意しましょう。文字に $-$ がついても、それが負の値とは限りません。このような感覚が数学の出来・不出来を決めるのです。

さて、根号を含む式の計算は性質をきちんと適用できれば簡単です。たとえば $\sqrt{24}\sqrt{21} - \sqrt{56}$ の計算は、

$$\begin{aligned} \sqrt{24}\sqrt{21} - \sqrt{56} &= \sqrt{2^3 \cdot 3}\sqrt{3 \cdot 7} - \sqrt{2^3 \cdot 7} \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7} - \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 7} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{14} - 2 \cdot \sqrt{14} \\ &= 4\sqrt{14} \end{aligned}$$

のように進めることができます。どこで何の性質を適用したか分かりますよね。ただ、$\sqrt{\ }$ の外に出せる**整数**は $\sqrt{1^2}, \sqrt{2^2}, \sqrt{3^2}, \sqrt{4^2}, \sqrt{5^2}, \ldots$（すなわち $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \ldots$）に限るので、

$$\begin{aligned} \sqrt{24}\sqrt{21} - \sqrt{56} &= \sqrt{4 \cdot 6}\sqrt{21} - \sqrt{4 \cdot 14} \\ &= 2\sqrt{6 \cdot 21} - 2\sqrt{14} \\ &= 2\sqrt{126} - 2\sqrt{14} \\ &= 2\sqrt{9 \cdot 14} - 2\sqrt{14} \\ &= 2 \cdot 3\sqrt{14} - 2\sqrt{14} \\ &= 4\sqrt{14} \end{aligned}$$

でもよいのです。少し冗長ですね。ただ、この例だけで結論づけてはいけません。数学では『この方法が常に一番よい』ということは多くないものです。状況により、適切なやり方は異なります。一つの方法だけ覚えて、この問題はこう解くと決めつけるようでは数学と呼べません。

分母の有理化

たとえば $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の**分母を有理化**すると $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ になります。単に機械的に計算するだけなので習熟は楽なものです。で、なぜ分母を有理化するのですか？

それは、$\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のような計算において分母を通分する必要があるからですが、通分のために有理化が必要なのではありません。分母を通分する理由は、異なる分母を共通の値にしないと分数計算ができないからです。であれば、分母さえ同じ値になればよいので

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{6\times\sqrt{3}}+\frac{2\times 2}{\sqrt{3}\times 2} \\
&= \frac{3}{6\sqrt{3}}+\frac{4}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{4}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{5}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

という通分でも問題ありません。約分できる分数は必ず約分しますが、約分できないのであれば分母に $\sqrt{\ }$ があることの何が悪いのでしょうか。

平方根の近似値

実は分母の有理化は、**近似値**を求める際に必要なのです。授業では慣れと簡便さのために、"分母の有理化" を単に "有理化" と言って通じるようになっていたでしょうが、本当は許されることではありません。なぜなら、高校以降の数学で学ぶはずですが、**分子の有理化**をする場合があるからです。もし、有理化という操作が分母に対してしか行わないのなら、わざわざ "分母の" をつける必要はありません。

実際、先の $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ の近似値を、$\sqrt{3}=\overset{\text{ヒト}}{1}.\overset{\text{ナ}}{7}\overset{\text{ミ}}{3}\overset{\text{ニ}}{2}\overset{\text{オ}}{0}\overset{\text{ゴ}}{5}\overset{\text{レ}}{0}\overset{\text{ヤ}}{8}$ として計算しようとすると

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{（そのまま代入）}} \frac{5}{2\times 1.7320508}, \qquad \frac{5\sqrt{3}}{6} \xrightarrow{\text{（分母を有理化して代入）}} \frac{5\times 1.7320508}{6}$$

となるので、どちらが計算しやすいか一目瞭然ですね。前者は電卓が必要でしょうが、後者は暗算できます。

ところで $\sqrt{3}=1.7320508\cdots$ ですが、教科書では近似値をどのように求めたでしょうか。おそらく

$$\begin{array}{llclll}
\underline{1.}7^2 & (=2.89) & と & \underline{1.}8^2 & (=3.24) & の間 \\
\underline{1.7}3^2 & (=2.9929) & と & \underline{1.7}4^2 & (=3.0276) & の間 \\
\underline{1.73}2^2 & (=2.999824) & と & \underline{1.73}3^2 & (=3.003289) & の間 \\
\underline{1.732}0^2 & (=2.999824) & と & \underline{1.732}1^2 & (=3.0001704) & の間 \\
 & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

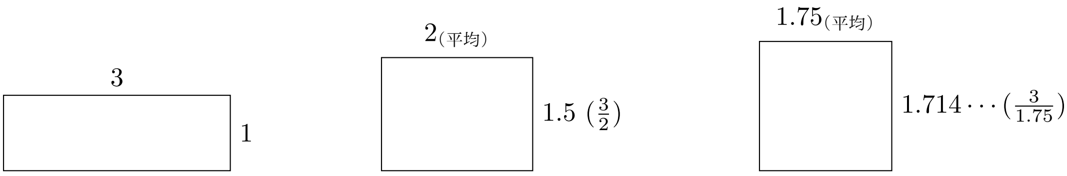
のように、範囲を絞って $\sqrt{3}$ の桁を確定させていったかもしれません。ただ、実際にこれを行うとなると、8 桁電卓ならここまででしょう。時間もかかり授業向きではありません。

平方根の近似値を求める方法の一つに、割り算の筆算に似た仕組みの**開平法**があります。計算の出だしは

$$
\begin{array}{ccc}
1 & & \\
1 & & \\ \hline
2 & 7 & \\
 & 7 & \\ \hline
3 & 4 & ? \\
 & & ?
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & 1. & & 7 & & ? \\ \cline{2-6}
\sqrt{} & 3. & & & & \\
 & 1 & & & & \\ \cline{2-4}
 & 2 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 8 & 9 & & \\ \cline{2-6}
 & & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

な感じです。**有効桁数**が 4, 5 桁程度まではよいのですが、それ以上だと計算桁数が増えて大変です。興味が湧いたら各自で調べてみましょう。

また、長方形の面積を利用して近似値を求める方法もあります。$\sqrt{3}$であれば、最初は 3×1 の長方形から始めます。長方形の面積は 3 です。



ここから次の長方形の 2 辺の長さを決めるのですが、一辺は現在の 2 辺の平均値 $\dfrac{3+1}{2} = 2$ に、もう一辺は $\dfrac{3}{(\text{いま求めた平均値})} = \dfrac{3}{2} = 1.5$ にします。すると、長方形の面積は 3 のまま 2 辺の値が接近します。そこで同じことを繰り返します。つまり、一辺を現在の 2 辺の平均値 $\dfrac{2+1.5}{2} = 1.75$ に、もう一辺は $\dfrac{3}{(\text{いま求めた平均値})} = \dfrac{3}{1.75} = 1.714\cdots$ にします。すると、長方形の面積は 3 のまま 2 辺の値がさらに接近します。この繰り返しです。電卓があれば容易にできるでしょう。電卓の表示が変わらなくなったところが近似値になります。この方法は、正方形の面積が a なら一辺の長さは $\sqrt{a}$ であることを利用したものです。

他には大学数学になってしまうのですが、近似式 $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \cdots$ を利用する手もあります。もっとも、これは $\sqrt{1.\mathrm{xxx}}$ を求める近似式なので $\sqrt{3}$ には不向きです。しかし

$$\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{(3/2)^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{1}{3}} \approx \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}\right) = 1.72916\cdots$$

のような工夫でなんとかなるものです[*1]。近似式の項をもう少し先まで利用するか、または $\dfrac{3}{2}$ ではなく $\dfrac{8}{5}$ などの値に変えてくくり出せば、さらに精確に値を求められます。

[*1] 記号 $\approx$ は “およそ・約” などの意味。記号 $\fallingdotseq$ を用いることが多い。