2 次関数

2 次関数の変化

中学校では、2 次関数は $y = ax^2$ の形のものだけを扱います。2 次方程式が一般に $ax^2 + bx + c = 0$ で表されるように、2 次関数も本来は $y = ax^2 + bx + c$ の形で表されるものです。一足飛びに一般の 2 次関数を学ぶのはハードルが高いので、$y = ax^2$ から始めるのは自然なことです。でも、$y = ax^2$ がすべてでないことは、あらかじめ知っておいて損はないでしょう。

さて、1 次関数は**傾き**や**切片**で特徴づけられていましたが、2 次関数 $y = ax^2$ はどうでしょうか。授業では何やらごちゃごちゃ調べた挙句（あげく）、結局はこれこれを覚えましょう的なことになっていたかも知れないですね。試験のことを考えればそれが効率的なのでしょうけど、2 次関数のことをきっちり学ぶなら、ごちゃごちゃしたことこそ大事なのです。

ごちゃごちゃしたことは関数の変化を調べるところから始まります。たとえば $y = x^2$ を考えます。x, y の対応を表にすると

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	16	9	4	1	0	1	4	9	16	…
y の変化量 [その増減]	…	-7 [+2]	-5 [+2]	-3 [+2]	-1 [+2]	$+1$ [+2]	$+3$ [+2]	$+5$ [+2]	$+7$	…	

です。授業では x, y だけの表しか作成しないでしょう。しかし、ここでは y の**変化量**についても調べます。なぜなら、それが 2 次関数の特徴の一つなのですから。するとこの例では、y の変化量は様々な値をとりますが、その増え方は一定して [+2] であることが分かります。つまり、

「“y の変化量” の増減」は一定である

と言えます。このことは他の例でも成り立つのでしょうか？　$y = -2x^2$ で調べましょう。

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32	…
y の変化量 [その増減]	…	$+14$ [−4]	$+10$ [−4]	$+6$ [−4]	$+2$ [−4]	-2 [−4]	-6 [−4]	-10 [−4]	-14	…	

やはり、「“y の変化量” の増減」は一定で、この例では [−4] になっています。変化量の増減が一定であるという特徴は 1 次関数のものです。1 次関数では、それを**直線の傾き**と呼んでグラフ作成などに活かしたのでした。2 次関数でも、変化量の増減に着目してグラフ作成に活かしてみましょう。

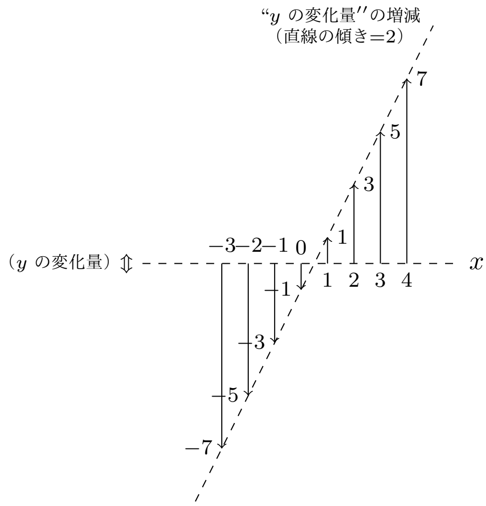
y の変化量とグラフ

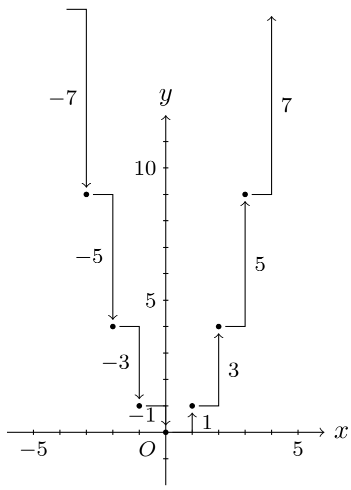
2 次関数 $y = ax^2$ の変化をグラフ上で見ることにします。それには、表の $(x,\ y)$ の組を座標として x-y 座標平面に点を打てばよいのです。しかし、際限なく細かに点を打つことは不可能ですから、場合によってはコンピュータなどでシミュレーションをしたかも知れません。また授業ではいろいろな制約から、x-y 座標に数点ほど点をとって、あとは大体こんなもんかな、とか言いながらグラフを描いたでしょうか。

ここでは、y の変化量に着目して 2 次関数のグラフを描いてみます。その前に、「“y の変化量” の増減」が一定の値になることを確認しましょう。2 次関数は $y = ax^2$ とします。

x	$\ldots$	k		$k+1$		$k+2$		$k+3$	$\ldots$
y	$\ldots$	ak^2		$a(k+1)^2$		$a(k+2)^2$		$a(k+3)^2$	$\ldots$
y の変化量 [その増減]	$\ldots$	$[\ldots]$	$2ak+a$	$[2a]$	$2ak+3a$	$[2a]$	$2ak+5a$	$[\ldots]$	$\ldots$

一般の話をしているので、x の値は具体的な数値でなく間隔 1 の任意の数値とします。こう書いた場合、かりに $k = 0$ とすると表は $x \mid \ldots\ 0\ 1\ 2\ 3\ \ldots$ を表し、かりに $k = -8.3$ とすると表は $x \mid \ldots\ -8.3\ -7.3\ -6.3\ -5.3\ \ldots$ を表すことになります。一般の話なら $x =$（k の式）を $y = ax^2$ に代入して、y の値や y の変化量を k を用いて計算すれば、一般の「“y の変化量” の増減」が分かるわけです。どれも $[2a]$ で一定ですね。で、具体的に $a = 1$ のときに $y = x^2$ について “y の変化量” を図示してみました。





左図は説明が必要ですね。たとえば、x： $0 \to 1$ のとき、$x = 1$ における y の変化量は 1 です。x： $1 \to 2$

のとき、$x=2$ における y の変化量は 3 です。したがって図では、x 軸の 1、2 の位置に対して $\uparrow_{+1}$、$\uparrow_{+3}$ を記入しました。つまり x の各点において、このような割合で $y=x^2$ は変化するのです。単に $(1,\ 1)$、$(2,\ 4)$ などと点を打つだけのグラフと比べると、動きがある様子がうかがえます。

放物線と直線

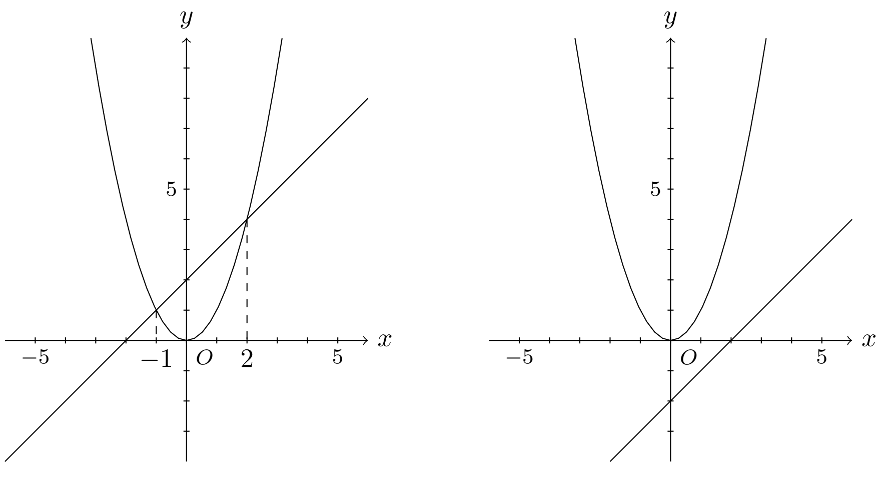
1 次方程式 $y=mx+b$ は、傾きが m、y 切片が b である直線を表しました[*1]。授業では、$y=mx+b$ を 1 次方程式と呼ぶことは稀（まれ）でしょう。でも、特定の値を代入したとき正しくなる等式を方程式と呼ぶのだから、$y=mx+b$ は方程式です。よって、特定の値の組 $(\dot{x},\ \dot{y})$ を x-y 座標平面に示すことができて、特定の点の**集合**が直線状に並ぶわけです。

また、2 次方程式 $y=ax^2$ は、a の値によって開き方と向きが変わる放物線を表しました。この理屈も直線の方程式と同じです。放物線は原点を通ります。さて、直線も放物線も方程式なので、連立方程式

$$\begin{cases} y &=& mx+b \\ y &=& ax^2 \end{cases}$$

を考えることができます。これは**代入法**、つまり y の代わりに x の式を代入して $ax^2=mx+b$ を得ます。するとこれは 2 次方程式なので、適切な方法で解けます。

では、このとき求められた解 x の値は何を表しているでしょうか。具体的に、直線の方程式 $y=x+2$ と放物線の方程式 $y=x^2$ で調べます。これらの連立方程式は結果的に $x^2=x+2$ となり、$(x+1)(x-2)=0$ から $x=-1,\,2$ はすぐに求まるでしょう。連立方程式の解は、二つの方程式の**共通解**です。つまり、x の値 -1 と 2 が共通していることになります。



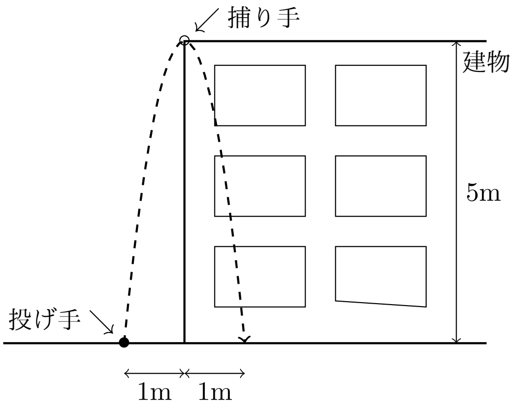
試しに直線の方程式を $y=x-2$ に変えて、$y=x-2$ と $y=x^2$ の連立方程式 $x^2=x-2$、すなわち

*1 $y=ax+b$ と書くと、放物線 $y=ax^2$ の a と重複するので文字を変えた。

$x^2 - x + 2 = 0$ を解いてみると、$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ なので解はありません。実際、二つのグラフに交点はありません。ちなみに、曲がりなりにも $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ と解けているので、$\sqrt{-3}$ に何らかの意味があれば解は "正当化" されます。それは、高校では**複素数**、大学では**複素関数**を学んで解決します。

放物運動

上空に向けてボールを投げると**放物運動**となり、ボールの**軌跡**は放物線となります。放物運動を表す式の基本は**自由落下運動の式** $y = -4.89x^2$ で、係数 -4.89 は**重力定数**の近似値です。ここでは簡単のため $y = -5x^2$ としておきます。ボールを投げる行為は日常的なのに、2 次関数の授業で扱うことはありません。それは自由落下運動の式が、現実の投げ上げで描く放物線とは別物だからです。しかし、違いをきちんと理解すれば難しい話ではありません。

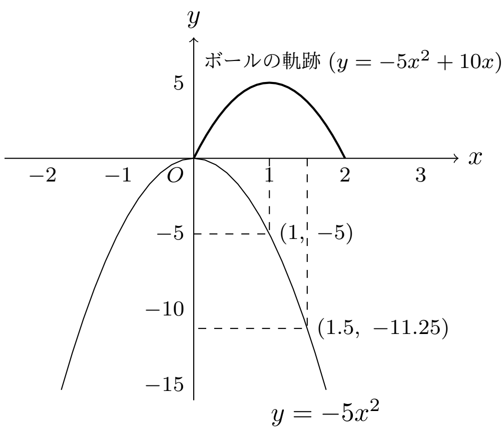


建物の端から 1m 離れた地上から、5m の高さの屋上で身を乗り出している人に向けボールを投げる様子を考えてください。投げる人は屋上の人が捕りやすいよう、ちょうど 5m の高さでボールが最高点に達するように加減して投げます。ところが屋上の人が捕り損ね、ボールは放物線を描いて建物の端から 1m 先へ落ちてしまいました。この様子はまさに $y = -5x^2$ のグラフを描いているように見えます。しかし、注意すべきは $y = -5x^2$ は

物体を高さ 0(m) の位置から力を加えず落とすとき、x（秒）後の物体の位置 y(m)

の関係式だということです。だから、ここで目にする放物線と自由落下運動の軌跡はまったくの別物なのです。

で、この式が何を教えてくれるかは、実際に数値を代入すれば分かります。たとえば $x = 1$ のとき $y = -5$、$x = 1.5$ のとき $y = -11.25$ です。これらの意味は、物体は 1 秒後に 5m 下にあり、1.5 秒後に 11.25m 下にあるということです。



ある時間における自由落下状態の高さを表す $y=-5x^2$ のグラフと、先のボールの軌跡のグラフ（実際の式は $y=-5x^2+10x$）を同じ x-y 座標に描いてみると、同じ形のグラフを目にできますが、グラフから読み取る意味は少し異なるのです。

(放物線) + (直線) = (放物線)

自由落下を表す式 $y=-5x^2$ のグラフと、ボールの軌跡の式 $y=-5x^2+10x$ のグラフは同じ形です。それで式の違いはというと、$y=-5x^2$ に $10x$ の項を加えたのがボールの軌跡であるということです。どういう仕組みでしょうか？

理由は意外に単純です。$y=-5x^2+10x$ から平方式を作ってみましょう。練習を積んだ人ならすぐに $y=-5(x-1)^2+5$ は求められるでしょう。そこでこの式を

$$y=-5(x-1)^2+5 \quad \Leftrightarrow \quad y-5=-5(x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad Y=-5X^2$$

と見直しましょう。結局 $y=-5x^2+10x$ は、本質的に $y=-5x^2$ と同じなのです。

さて、2 次関数の式 $y=ax^2+bx+c$ は必ず $y=a(x+\triangle)^2+\square$ の形になるのでした。$y=ax^2+bx+c$ を、放物線の方程式 $y=ax^2$ と直線の方程式 $y=bx+c$ を合わせたものと考えれば、必ず $y=a(x+\triangle)^2+\square \quad \Leftrightarrow \quad Y=aX^2$ の形になるので、これは放物線です。

直線の方程式 $y=mx$ と直線の方程式 $y=k$ を合わせると、直線 $y=mx$ を y 軸に k だけ**平行移動**した直線になるように、

$$\boxed{y=ax^2 \text{ と } y=bx+c \text{ を合わせると、放物線 } y=ax^2 \text{ を平行移動した放物線となる}}$$

ことが分かります。

どれほど平行移動するかは高校数学の話ですが、$y=ax^2+bx+c$ を $y=a(x+\triangle)^2+\square$ に直せれば様子

が見えてくるはずです。式変形は文字式のよい計算練習になるでしょう。結果が

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

になることだけ示しておきます。似た式を 2 次方程式の解の公式に関連して見ているはずです。