2 次方程式

2 次方程式の解

x の特定の値で成り立つ**方程式**のうち、2 **次式**であるものが x についての 2 **次方程式**です。このとき x を**未知数**と呼び、特定の値を**方程式の解**（または**方程式の根（こん）**）と呼びます。たとえば、2 次方程式 $x^2-2x=8$ は $x=4,\ -2$ のときに限り成り立つので、それが方程式の解です。また、2 次方程式 $x^2+3=0$ を満たす x は存在しないので、この 2 次方程式に解はありません。

因数分解による解法

先の 2 次方程式 $x^2-2x=8$ は、たとえば

$$\begin{aligned} x^2-2x &= 8 \\ x^2-2x-8 &= 0 \\ (x-4)(x+2) &= 0 \qquad (*) \\ x &= 4,\ -2 \quad (**) \end{aligned}$$

のように解きます。因数分解 $(*)$ の際に見つけた $-4,\ 2$ の組が、実際の方程式の解 $(**)$ では $4,\ -2$ になります。方程式の解は、因数分解で見えている数値と逆の符号になるので、習慣的に逆符号にして解を書く人も多いでしょう。試験の解答を書くにはそれでよいのですが、等式の意味を疎（おろそ）かにして手順だけ覚えても意味はありません。きっちり理解しましょう。

因数分解 $(x-4)(x+2)=0$ から解が $x=4,\ -2$ となる理由は、

$$\boxed{AB=0 \quad \Leftrightarrow \quad A=0 \text{ または } B=0} \qquad (※)$$

であることが根底にあります。記号 $\Leftrightarrow$ は二つの記号 $\Rightarrow$、$\Leftarrow$ を合わせたもので、$A \Rightarrow B$ と書けば A ならば B であるを意味し、$A \Leftarrow B$ と書けば B ならば A であるを意味します。$\Leftrightarrow$ は $A,\ B$ どちらから見ても成り立つことを述べているので、結局 $A,\ B$ は**同値関係**にあるといいます。

さて、いま解いた方程式は（※）の性質を用いました。つまり、$(*)$ と $(**)$ の間には

『（※）より、$x-4=0$ または $x+2=0$。よって、』

の 1 行が入っているのですが、ふつう省略しているだけなのです。本来はこの行の $x-4=0$ と $x+2=0$ から数を移項して、最後の解 $(**)$ となるわけです。因数分解で見つけた数を逆の符号にして $x=\square,\ \triangle$ を方程式の解とする、を習慣にしてしまうことは悪いことではないですが、理屈まで理解していないと $x(x+2)=0$

から $x=-2$ の解しか見えないことになりかねません。試験がある以上、効率よく暗記することは重要ですが、暗記の前に自分の頭できちんと理解することは欠かせません。

2 次方程式の解の公式

因数分解ができない、もしくは因数分解を思いつかない 2 次方程式は、解の公式を使います。解の公式は

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)\ \text{の解は} \\ x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}}$$

ですから、しっかり覚えて代入するだけで済みます。公式は導くのが手間であることが多く、結果が重要視されることから、授業では暗記して使えるようにすることに主眼が置かれます。でも、きっちりした数学を学ぶなら、この程度の式変形は理解した方がよいでしょう。実際、文字式の計算と等式の性質がよく分かっていれば難しいことはありません。

2 次方程式から解の公式にいたるまで示します。等式の何の性質を用いて式を変形したか追ってください。

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 \\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0 \\
x^2+\frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (*) \\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|} \qquad (**) \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

教科書や参考書、または問題集の模範解答などは、とくに説明がなく式変形をしていることは多くあります。理由は、説明がなくとも分かるはずだからです。

もし、ある行から次の行への変形が分からないとしたら、それはあなたの理解不足です。

ただ暗記したり素通りしたりせず、その理由を理解しましょう。$(*)$ で両辺に $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ を足しているのが唐突に思えたかも知れません。しかしここは、これ以外の項では意味を成しません。展開・因数分解で用いる公式 $(x+m)^2=x^2+2m\cdot x+m^2$ から分かるように、$(\ )^2$ であるためには、x の項の係数と定数項の関係は $2m$ と m^2 でなければならないからです。$(*)$ で $2m$ に相当する x の係数は $\dfrac{b}{a}$ なので、m^2 に相当する項は $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ に決まります。分かりますね。

また、(∗∗) で $|a|$ となっているのは、$\sqrt{a^2}=|a|$ であったことを思い出してください。しかし最終的に絶対値がない理由は、± がついているためです。$\sqrt{a^2}$ が a であっても $-a$ であっても同じことだからです。ふつう授業では触れないと思いますが、ちょっと厳密に書いてみました。

解の公式だけを頼らない

どんな 2 次方程式でも解の公式に当てはめれば必ず解けます。しかし、因数分解した方がはるかに手間が少ない場合もたくさんあります。数学に苦手意識があると、つい簡単で確実な方法で解きたくなるものです。そこで、因数分解と解の公式のどちらで解くべきか区別するにはどうすればよいか、という実にくだらないことで悩むのです。

そのような 100% 確実に区別できる簡単な方法があれば授業で教えるかも知れません。でも、そういうことではないのです。

2 次方程式は基本的に因数分解を試行錯誤し、無理そうなら解の公式を使うのです。

これこそが数学ができる・できないの分かれ目です。数学ができる側の人たちは、可能性のすべてを試しています。そして因数分解が無理だと分かったとき、解の公式を使います。でも、数学ができない側の人たちは、テキトーなところで因数分解をあきらめて解の公式を使うでしょう。その結果、実は因数分解ができたことに後から気づくものです。もちろん、そのようなことは数学ができる側の人たちにもあり得ます。しかし、とことん因数分解を試みた経験は蓄積されるので無駄にはなりません。この蓄積の差が、数学のできる・できないを分けるのです。

たとえば、$4x^2+8x+3=0$ だったら解の公式で解くものだと思うでしょう。もちろん、それでかまいません。ただ、式を注意深く見て、$4x^2$ と $8x$ の係数からうまくすれば $(\ )^2$ を作れると感じることができたらしめたものです。$4x^2+8x+4$ だったら $(2x+2)^2$ であるとか、$4(x^2+2x)$ に気付けば ( ) の中が x^2+2x+1 なら $(x+1)^2$ になるとか考えられます。そうすると

$$\begin{aligned}
4x^2+8x+3 &= 0 \\
4x^2+8x+4 &= 1 && \text{（両辺に 1 を足す）} \\
(2x+2)^2 &= 1 \\
2x+2 &= \pm 1 \\
2x &= -2\pm 1 && \text{（$-2+1$ または $-2-1$）} \\
x &= -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

とできたり、または、$4(x^2+2x+1)-1=0$ としてから $(\ )^2$ に直せたりします。ここで突然 -1 が現れたのは、

そうしないと元の式と違ってしまう

からです。こういう考え方ができる人は蓄積がある人です。何かの公式や方法を用いて -1 を出したのではありません。

平方の項を作る

2 次方程式は、因数分解を試みて無理そうなら解の公式を頼る、という流れで間違いなく解けるので、それ以外のことは疎（おろそ）かにしがちです。数学の勉強が中学校で終了するならかまわないのですが、高校でも数学の勉強は続くのです。その際、中学校で学んだけれど普段は使わない事柄が、高校数学で多く利用されることはあります。その一つが、2 次方程式を $(\text{何がし})^2 = \square$ の形にして解く方法です。

高校では $(\text{何がし})^2$ の形を作ることを**平方完成**と呼んで多用します。多用するだけに素早い式変形を要求されますが、きちんと勉強していないとうまくできない場合が出てきます。暗記に頼る勉強をしている人は要注意です。平方完成のやり方は一つしかなく、それは

$$\boxed{(x+\triangle)^2 \text{ を作ること}} \qquad (※)$$

です。『いや、その方法を教えてほしいのだよ』と言うようではダメです。数学の勉強のコツがつかめない人は、$(\text{何がし})^2$ を作るための手順や公式を覚えようとしがちです。正確に暗記できればよいのですが、そうすると暗記すべき量が膨大になってしまいます。なぜなら、いろいろな場合によって手順が少し違う（ように思える）からです。でも本当は、原則、一つの手順しかないのですよ。

しかし、練習問題を考えながら多く解いた人なら、そうなっていないはずです。いろいろな場合による手順の違いなど暗記していないからです。こう言うと、暗記せずになぜ解けるのか疑問に感ずるでしょう。でも、そうなのですよ。できる人は暗記しようとは思わず、単に（※）に注力しているだけなのです。

具体的な例を示しましょう。2 次方程式は $(x+\triangle)^2$ さえ作れば、因数分解も解の公式も不要です。そして $(x+\triangle)^2$ にするには

$$x^2 + \square\, x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 \to (x+\triangle)^2$$

のように、定数項が『x の係数の半分の 2 乗』であればよいのです。だから等式の性質により、無理やりでも両辺に「x の係数の 1/2 の 2 乗の項」を加えることができます。よって、たとえば $x^2-3x+2=1$ を解きた

ければ

$$\begin{aligned} x^2-3x\overbrace{+\left(\frac{3}{2}\right)^2}^{x\,\text{の項の直後に挿入}}\underbrace{+2}_{\text{移項}\to}&=1+\overbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}^{\text{右辺にも挿入}}\\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2&=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\\ &\vdots \end{aligned}$$

のような手続きでよく、公式を使うより簡単かもしれません。そもそも公式はこの手順の最終結果なのですから。

すると、この手順を『暗記すれば使える！』と思ったあなた、その考えは間違ってます。たとえば方程式が $2x^2-3x+2=1$ だったらどうでしょうか？　おそらく暗記量が乏しい人には難しいと思われます。これは x^2 の係数が 1 ではないため、$2x^2-3x\to 2\left(x^2-\dfrac{3}{2}x\right)$ と見た上で、

$$2x^2-3x+2=1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-2\left(\frac{3}{4}\right)^2=1-2 \quad (※)$$

とします。この変形は、数式的には

$$\boxed{ax^2+bx+c=d \quad\Leftrightarrow\quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2=d-c}$$

なのですが、計算力に自信がない人はなんとか公式として覚えようとします。でも、このような式変形をチャッチャできる人は、公式なんて暗記していません。むしろ公式として暗記しているなら、その人は並大抵の頭脳以上に優れているのでしょう。

"普通に" できる人の頭の中はそれぞれでしょうが、自分の力で計算練習をたくさんしていれば、おそらく

$$2x^2-3x+2=1 \quad\Rightarrow\quad 2\Big(x-??\Big)^2-??^2=1-2$$

のようなものが浮かんでいるはずです。このとき、要は $2x^2-3x+??^2\Leftarrow 2\Big(x-??\Big)^2$ の形に戻ればよいので、?? に当てはまる値を考えるだけです。こうすれば同時に**検算**にもなるのですから。

さて、そうであれば二、三の試行錯誤で十分ですね。?? は $\dfrac{3}{2}$ か？、いや $\dfrac{3}{4}$ だ！、程度のことで正しいことが確認できます。その結果、（※）がすぐ分かるのです。

自分スタイルで

数学は答が一つだから好き・嫌いという話はよくされますが、それは試験を念頭に置いた考えです。たとえば国語。小説などの解釈はいろいろできるというのは単なる幻想です。あなた方がする勉強は試験につながる

以上、答えは一つにならざるを得ないのです。本来、自由な解釈をしてよい小説の答が一つなら、答までの道筋もほとんど一本道になるでしょう。でも数学は違います。たとえ

答が一つであっても、そこに至る考え方はかなり自由度が高い

ものです。授業では、どうしても典型的なやり方を学びがちですが、正しい思考なら何通りもの考え方があります。

方程式も単に計算と思われがちですが、計算の仕方は人それぞれでよいのです。参考書などには普通の解法の他に、ある視点を利用すれば簡単に解ける別解が載っていたりします。簡単に解けるならと別解を覚えたくなったとしても、理屈も未消化のまま暗記しても害しかありません。あなた方にとっては試験中に短時間で解ける方法が最良なのです。たとえそれが遠回りな解法であってもです。