1 次関数とグラフ

比例

小学校で学んだ**比例**を、中学校では $y = ax$ の関係式で表すことになりました。しかし $y = ax$ を見ると、単に数値を代入して計算することに注力されがちです。関係式の扱い方や計算力を高めることは大事でしょうが、

$$\boxed{\text{比例とは、互いが定数倍の関係にあるもの}} \qquad (※)$$

という認識は常に持っていなければなりません。たとえば、買い物をしたときの商品数量と値段の関係や、乗り物に乗ったときの時間と移動距離の関係などです。これらは日常にありふれたもので、しかも（※）を満たしています。

一方、日常にありふれていながら計算が難しいものもあります。たとえば、一定の年率で分割払いをすることなどは一つの例になります。一般に、年率というと**複利**計算が前提のため、計算は少々面倒になるものです。**単利**なら比例の延長で計算も楽ですが、複利の**近似**として単利を使うことはあまりうまくありません。**2 次式**で近似すると比較的よい結果を示せますが、でも、これは **2 次関数**の章に譲りましょう。

変化の割合

たとえば $y = 2x + 3$ において、y と $2x + 3$ は純粋な比例関係にありません。“純粋な” というのは次の理由からです。まず、y と $2x + 3$ は互いに 1 倍の関係にありますが、それならすべての等式は比例関係となり面白くありません。y と x が純粋な比例にならないのは、**定数項** $+3$ があるためです。でも、x が大きな値なら、y と x は**ほぼ比例**しています。実際、

$$\xrightarrow{(x\text{ が 5 倍なら} \ldots)}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 倍}}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
x & 1000 & 2000 & 5000 \\
y & 2003 & 4003 & 10003
\end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{ほぼ 2 倍}]{}$$

$$\xrightarrow[(\ldots\ y\text{ もほぼ 5 倍})]{}$$

のようなことはすぐ調べられますね。

しかし $y = 2x + 3$ においては、$y - 3$ と x を比べれば純粋に正比例しています。**比例定数**は 2 です。一般

に $y=ax+b$ は $y-b$ と x が比例の関係にあり、比例定数は a です。

しかし授業では、このような考察はしないでしょう。具体的に $x:1\to 2$ のときの変化や $x:-2\to 3$ のときなどの変化を調べるはずです。すると

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & 2 \\ y & 5 & \to & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & -2 & \to & 3 \\ y & -1 & \to & 9 \end{array}$$

などの例から、

$$\boxed{(\text{変化の割合})=\frac{(y\text{ の増加量})}{(x\text{ の増加量})}}$$

で定義された**変化の割合**を用いて計算するといずれも (変化の割合) $=2$ となって、$y=2x+3$ の x の**係数**と一致します。このことから授業では、$y=ax+b$ において変化の割合は一定でその値は a に等しい、ということを導くはずです。

つまり、変化の割合は x の係数と同じという認識になって、この値を重視するようになります。当然のように、変化の割合は "用なし" になるのです。しかし、騙（だま）されてはいけません。関数を調べる際に大事なのは、a が何を意味するかではなく、

変化の割合の考えを用いて、関数の変化の様子を調べること

にあります。今回は、関数の変化の様子を調べた結果、結論として (変化の割合は一定) $=a$ となったわけです。重要度の順位を間違えないようにしましょう。

1 次関数

$y=ax+b$ においては $y-b$ と x が比例の関係にあります。だから変化の割合と比例定数が共に a となりますが、このことはそれほど**明らか**なことではありません。ですが、あらためて a を**傾き**、b を y **切片**と呼ぶことにし、これらから関数の様子を x-y 座標に描くことができます。つまり、y 切片を基準点にして、傾き a の先にある点と結べば直線が描けるということです。

授業ではこのように、傾き a の値と y 切片 b の値がさも重要なことのように扱い、形式的に直線を描くことができるような練習をするものです。その際、y 切片は単に "切片" と称して手抜きすることが多くなります。しかし、直線が y 軸を横切るから y 切片なのであって、x 軸を横切れば x **切片**です。中学校ではまず x 切片は登場しないので、簡便な言い方を皆が了解していれば問題ないのですが、それは本当に正しいことを理解できている人だけが共有することなのです。気をつけましょう。

さて、a, b の役割を覚えると機械的に $y=ax+b$ から直線を、また逆に直線から $y=ax+b$ の式を求める

ことに習熟するようになります。もちろん試験に臨（のぞ）む必要がある以上、そういった勉強が中心になることは仕方ありません。しかし、本質は

$$\boxed{\text{方程式 } y=ax+b \text{ は、直線を表す}}$$

ことなのです。方程式は「特定の値に限り成り立つ等式」のことですから、特定の x, y の組だけが正しい等式を満たします。そのため、x, y を組にした $(x,\ y)$ を x-y **座標平面**に描くことができて、結果、直線になるのです。それで「$y=ax+b$ は直線の方程式である」という言い方をするのです。

x-y 座標平面と逆関数

授業では、x と y の対応表から x-y 座標に点 $(x,\ y)$ をとって直線のグラフを仕上げることでしょう。座標を表す $(x,\ y)$ の組と座標上の一点は**一対一に対応**していますが、2 値一組のペアを一点と対応させるのは、数学を苦手とする人には難しいようです。実は、分数も 2 値一組のペアを一つの数値に対応させているのですが、分数はそういう感覚が薄れているのではないでしょうか。理由は、たくさんの練習を積んだからでしょう。

数学で新しい単元や概念を学ぶとき自然な理解を得られないことがありますが、当然のことです。それを違和感なく使えるようにしたければ

とにかく定義に忠実に練習を積むこと

です。はじめのうちは教科書や参考書を何度も見返すことになるでしょうが、その必要がなくなるまで繰り返すのです。手間と時間がかかりますが、それが正しい勉強法です。座標は日常目にするグラフを、より**抽象的**にしたものです。抽象化に慣れることが数学を得意にする秘訣です。

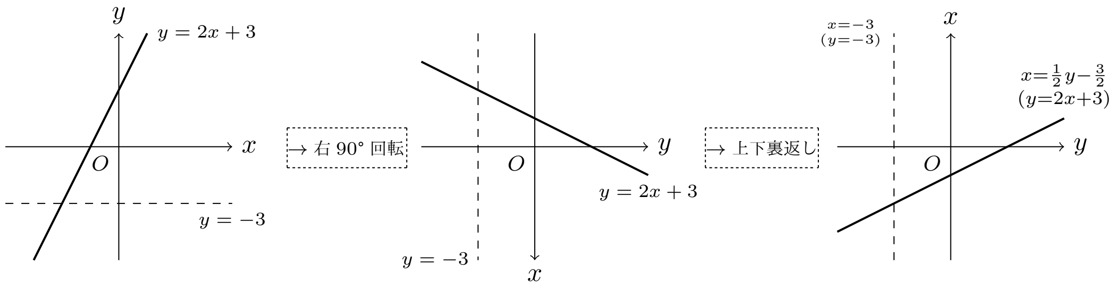
ところで、1 次関数 $y=ax+b$ は x の値から y の値を求める式ですが、授業や試験では y の値が分かっているときの x の値を求めることもあるでしょう。単に計算問題としてとらえずに、少し一般化して考えてみます。たとえば $y=2x+3$ であれば、x の値を知るために等式を x で解き直して $x=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{3}{2}$ とします。このように

$$\boxed{y=(x\text{ の式})\text{ を } x=(y\text{ の式})\text{ に直した関数を、逆関数という}}$$

のですが、ふつう**逆関数**も $y=\cdots$ と書く方が分かりやすいので、$x=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{3}{2}$ は互いの文字を交換して $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ と書きます。そうすれば、逆関数のグラフも x-y 座標に同じように描けます。しかし、あらためて式を変形してからグラフを描かずとも、逆関数が x と y の文字を入れ替えたものであることに注意すれば、

座標軸の方を入れ替えてしまえばよい

のです。“軸を入れ替える” というのは単に x と y の文字を取り替えるのではなく、軸の立場が入れ替わるように（回転）→（裏返し）をすることをいいます。x-y 座標とグラフが透明なシートに描かれていると思えば分かりやすいでしょう。



また、$y=ax+b$ のグラフが身についても $y=b$、$x=k$ のグラフ、とくに $x=k$ のグラフに変な感じを持つことはあるかもしれません。しかし、たとえば $x=-3$ は $y=-3$ の逆関数と考えれば、座標軸の反転から納得しやすいのではないでしょうか。上図の破線直線がそのことを示しています。

1 次関数と 1 次方程式

たとえば、直線の方程式 $y=2x+3$ と x の方程式 $2x+3=0$ を考えましょう。どちらも方程式ですが、直線の方程式は 1 次関数と呼ぶのでした。2 式の違いは 1 次関数の y を 0 に変えたものだと分かります。$0=2x+3$ は $x=-\dfrac{3}{2}$ と解けるので、1 次関数の立場から見ると $y=0$ のとき $x=-\dfrac{3}{2}$ であること、すなわち座標の $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ であることが分かります。これ、x 切片ですよ。この x, y の値は、直線の方程式と $\cdots=0$ の方程式に共通の解です。

ところで方程式 $2x+3=0$ 解は $x=-\dfrac{3}{2}$ ですが、この式は x 軸上の点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ に垂直な直線を表していたことを思い出しましょう。実は $2x+3=0$ も直線の方程式だったのです。すると二つの方程式に共通の解は、二つの直線に共通の点ということになり、直線の交点を表します。

であれば、連立方程式を解いて求めた解が何であるかは**明らか**でしょう。連立方程式はたいてい

$$\begin{cases} 4x-3y &= -23 \\ x+6y &= 28 \end{cases}$$

のように書かれていますが、これを

$$\begin{cases} y &= \dfrac{4}{3}x+\dfrac{23}{3} \\ y &= -\dfrac{1}{6}x+\dfrac{14}{3} \end{cases}$$

と見直せば、2 直線の連立方程式となります。どちらの連立方程式を解いても解は $(-2,\ 5)$ です。

授業ではおそらく、最初の連立方程式なら**加減法**、見直した連立方程式なら**代入法**で解くのでしょうか。何

かをするときに複数の方法がある場合、数学に手を焼いている人は、いくつかの方法をどうやって見分けるのか気にするようです。つまり、ここがこうなら方法 A、ここがああなら方法 B、... のように。そんな枝葉のようなコトは覚える意味がないのですけどね。

連立方程式は、一つの等式に複数の変数があるのが普通です。しかし方程式は

一つの等式に一つの変数があるときに限り、解ける（変数の値が特定できる）

のです。だからやるべきことは決まっていて、

一つの等式に、一つの変数があるようにする

ことです。ここを押さえていれば、加減法にするか代入法にするかは、自（おの）ずと見えてくるはずです。

直線の方程式に関する練習問題

この単元の練習問題に

問） 2 点 (○, ◇)、(□, △) を通る直線の方程式を求めよ。

のようなものがあります。解法としては、求める直線の方程式を $y = ax + b$ とおいて

A) 2 点から直線の傾き m を求め、次に m を使って $y = mx + b$ に (○, ◇) を代入して b を求める。

B) $y = ax + b$ に (○, ◇) と (□, △) を代入して、連立方程式から a、b を求める。

が示されていることが多いでしょう。でも、ここでは別の視点から解いてみましょう。

具体的に問題を

問） 2 点 $(-2,\ 3)$、$(4,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

とします。解く際の別の視点とは、変化の割合が直線の傾きを表すことを利用します。一般に、x 軸方向の変化量が p、y 軸方向の変化量 q のとき、直線の傾きは $\dfrac{q}{p}$ となります。“一般に” と、もって回った言い方をしたのは $p = 0$ は例外となるからですが、この**問）**ではとくに気にする必要はありません。

ところで、**問）**において直線の傾きを求めるには $\dfrac{1-3}{4-(-2)}$ を計算するでしょうが、点 $(4,\ 1)$ でなくとも、求める直線上にある点ならどんな $(x,\ y)$ であっても $\dfrac{y-3}{x-(-2)}$ を計算するはずです。そして、これは必ず直線の傾きと同じ値になるので

$$\frac{y-3}{x-(-2)} = \frac{1-3}{4-(-2)} \quad \text{すなわち} \quad \frac{y-3}{x+2} = \frac{-2}{6} \quad (※)$$

が成り立っています。分数計算においては

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad=bc}$$

は常に言えるので、(※) は $6(y-3)=-2(x+2)$ と同値です。この式を整理して、求める直線の方程式は $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$ と分かります。

高校ではこのような考えとは別に、2 点を通る直線の方程式を求める公式を習うはずです。公式があれば何も考えることなく問題は解けますが、数学はいろいろな考え方ができるものです。暗記だけに頼らず、いろいろな考え方に触れる勉強を心がけましょう。

ちなみに、この考え方を公式にすることはできます。それは、

$$\boxed{2\text{ 点 }(a,\ b)\text{、}(c,\ d)\text{ を通る直線の方程式は、}\frac{y-b}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}}$$

というものです。あなたが高校で習う公式も、これが元になっているはずです。式の形は少し異なりますが。