1 次方程式（add.*不等式）

等式と方程式

演算記号である**等号** $=$ は小学校以来、計算を進めるときに使用してきました。たとえば $3+4\times5=3+20=23$ のように。$=$ が用いられた式が**等式**です。だから $1+2=5$ も等式ですが、もちろん間違った等式です。等式には正しい等式と間違った等式があるのです。

では、文字式はどうでしょうか。たとえば $a+b=c$ と書いたとき、等式には違いないのですが正しいか間違っているかは分かりません。$a=b=5$ で、$c=10$ なら正しい等式ですが $c=20$ なら間違った等式です。文字式で、このように特定の値が**代入**されたときだけ正しい等式になるものを**方程式**と呼びます。また、$a+2a=3a$ も等式ですが、これは特定の a でなくとも常に正しい式になるので、**恒等式**と呼びます。恒等式のうち、とくに利用価値が高いものが**公式**となるのです。

方程式は正しい等式になったりならなかったりするので、文字の値がどのようなとき正しい等式になるかは重要です。そこで方程式の目的の一つは、正しい等式になる値を探すことです。

等式の性質

方程式は、たとえば $5x-8=1-2x$ のように書かれ、x に値を自由に代入できます。もちろん、代入する値によっては間違った等式にもなります。**任意の**値を代入できる文字は**変数**と呼びます。すると方程式の目的は、**方程式を解いて**変数の正しい値を求めることと言えます。ちなみに、代入目的でない文字、つまり値が決められている文字は**定数**といいます。代表例は**円周率**を表す π でしょうか。

方程式は等式なので、方程式を解くために等式の性質が有効に使えます。等式はもともと $=$ の左右の値（$=$ の左側の式を**左辺**、$=$ の右側の式を**右辺**、両方まとめて**両辺**と呼ぶ）が等しいので、等式の両辺に同じことをしても左右が等しいことに変わりはないはずです。よって

・等式の両辺に、同じ値を足してよい
・等式の両辺から、同じ値を引いてよい
・等式の両辺に、同じ値を掛けてよい
・等式の両辺を、同じ値で割ってよい（ただし 0 で割れない）

ことが言えます。“0 で割れない” 理由は**数学上の約束**です。正しくは “0 で割ることを**禁止**する” です。**定義**や**定理**の類（たぐい）ではありません。なぜ、禁止事項なのかは、ぜひ自分で調べてみましょう。

方程式の解き方

先の方程式の例、$5x-8=1-2x$ は $x=\dfrac{9}{7}$ のときに限って正しい等式になります。つまり、$5x-8=1-2x$ の等式を $x=\dfrac{9}{7}$ の形にできれば方程式が解けたことになるわけです。そこで、等式の性質が役立ちます。順を追って等式の性質を適用してみます（左端の数字:は行番号です）。

$$\begin{array}{lrcll}
1: & 5x-8 & = & 1-2x & \text{（最初の方程式）} \\
2: & 5x-8+2x & = & 1-2x+2x & \text{（両辺に } 2x \text{ を足した）} \\
3: & & \vdots & & (*) \\
4: & 7x-8 & = & 1 & \text{（同類項をまとめた）} \\
5: & 7x-8+8 & = & 1+8 & \text{（両辺に 8 を足した）} \\
6: & & \vdots & & (**) \\
7: & 7x & = & 9 & \text{（同類項をまとめた）} \\
8: & & \vdots & & \text{（以下省略）}
\end{array}$$

少し冗長ですが、本来、方程式はこのように解くものです。しかし、いつもこれでは効率的ではありません。

移項

いま解いた方程式の 2:行目を見てください。両辺に $2x$ を足した理由は、右辺の $-2x$ を打ち消すためでした。そこで右辺の項 $-2x$ だけが消去された式を $(*)$ の位置に挿入すると 1:, 3:行目は

$$\begin{array}{lrcll}
1: & 5x-8 & = & 1\ \underline{-2x} & \text{（最初の方程式）} \\
2: & & \swarrow & & \text{（両辺に } 2x \text{ を足した）} \\
3: & 5x-8\ \underline{+2x} & = & 1 & (*)
\end{array}$$

になります。右辺にあった $-2x$ が、符号を変えて左辺に移動したように見えます。同様のことが以下の行

$$\begin{array}{lrcll}
4: & 7x\ \underline{-8} & = & 1 & \text{（同類項をまとめた）} \\
5: & & \searrow & & \text{（両辺に 8 を足した）} \\
6: & 7x & = & 1\ \underline{+8} & (**)
\end{array}$$

でも起きています。

どんな方程式でも、何かの項を消去するために両辺にその逆符号の項を加えると、その項が反対側の辺に符号を変えて移動したように見えるのです。実は、

数学の正しい性質などを適用した結果そう見えるものは、そうしてよい　（※）

のです。つまりこの場合は

$$\boxed{\text{等式の一方の辺にある項を、符号を変えて反対側の辺へ移動してよい}}$$

ことになります。この操作を**移項**と呼び、今後方程式の両辺に同じ値を足す・引くする代わりに用いてもよいとします。つまり、移項という操作は数学的には存在せず、等式の両辺に同じ値を足す・引くした結果、項が移動したように “見える” ので、それで代替しているのです。

■分数の割り算について

余談ながら、皆さんは（※）を小学校から使っています。それは

$$\boxed{\text{分数の割り算は、逆数にして掛ける}}$$

です。これは、分数が**通分**できることを利用した計算が “そう見える”、つまり逆数を掛けたように見えるので堂々と行っているのです。

実は、分数の割り算は逆数にして掛ける必要はありません。掛け算同様、分子・分母どうしを割ればよいだけです。実際 $\dfrac{10}{9} \div \dfrac{5}{3} = \dfrac{10 \div 5}{9 \div 3} = \dfrac{2}{3}$ でよいことは、掛け算と割り算が逆の関係にあること、つまり $\dfrac{10}{9} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{3}$ であることから確認できます。では、なぜいつもそうしないかというと、割り切れないことがあるからです。たとえば $\dfrac{10}{9} \div \dfrac{3}{5} = \dfrac{10 \div 3}{9 \div 5} = \dfrac{3.333\ldots}{1.8}$ では具合が悪いですね。

そこでこのようなときは、あらかじめ通分しておくことで “必ず割り切れる” ようにするのです。すると

$$\frac{\overbrace{10}^{\frac{10}{9}\text{を}}}{9} \div \frac{3}{5} = \frac{10 \overbrace{\times 3 \times 5}^{3\times 5\text{ で通分}}}{9 \times 3 \times 5} \div \frac{3}{5} = \underset{\uparrow\text{ 消去 }\uparrow}{\frac{\overset{\swarrow\text{ 消去 }\searrow}{10 \times \cancel{3} \times 5 \div \cancel{3}}}{9 \times 3 \times \cancel{5} \div \cancel{5}}} = \frac{10 \times 5}{9 \times 3} = \frac{10}{9} \times \frac{5}{3}$$

のように、割り算が逆数の掛け算に “見える” ので、そうしてよいのです。

連立方程式

連立方程式を解く際、授業ではいわゆる**代入法**と**加減法**を学ぶでしょう。すると連立方程式が与えられたとき、どちらの方法で解くのがよいかを気にする人がいますが、そんなことは考えるだけ無駄です。なぜなら、解ける方法で解けばよいからです。このとき、どちらの方法で解けるかを見分ける基準を聞くようでは方程式の本質を分かっていないことになります。方程式は原則、

$$\boxed{\text{一つの等式に未知数が一つだけのときに限り、解ける（値が一つに決まる）}}$$

ものだからです。未知数が 2 個あれば、異なる方程式が 2 個必要です。

具体的に、連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& \dfrac{3}{2}x - 1 \\ 4x - 3y &=& -5 \end{array}\right.$$

を解いてみましょう。2 式とも未知数を 2 個含んでいるので単独では解けません。そこで文字を消去するので

すが、第 1 式がすでに $y=$ になっているので第 2 式に代入しますか？　それとも第 1 式を 3 倍して加減法を用いますか？

実際はどちらでもよいのです。あなたの好きにすればよろしい。強いて少し特殊な方法を挙げるなら、第 1 式を -3 倍して右辺を第 2 式の $-3y$ とそっくり入れ替えることです。つまり

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3y &=& \boxed{-\frac{9}{2}x+3} \\ & \swarrow & \\ 4x\boxed{-3y} &=& -5 \end{array}\right. \qquad \text{より、} \quad 4x\boxed{-\frac{9}{2}x+3}=-5 \quad \text{（※）}$$

とした上で（※）の両辺を 2 倍するのはどうでしょうか。すると、$8x-9x+6=-10$ から $x=16$ が求まります。

この例では、『こんな方法もアリだよ』と言いたいわけではありません。おそらく授業では、

> 連立方程式の解き方は、代入法と加減法がある。代入法の解き方は . . . 。加減法の解き方は . . . 。

のように学習したかもしれません。それで二つの解き方をまる覚えするから、どっちの方法で解くか迷うことになるのです。そんなことでは数学ができるはずがありません。

$$\boxed{\text{連立方程式は、2 式から 1 文字を消去して解く方法しかない}}$$

のです。このことを理解していれば、代入法や加減法などは枝葉の問題に過ぎません。あなたが使いたい方法を使えばよいのですから。

*不等式・数の大小

不等号は小学校で数の大小を比較するときに用いたぐらいで、中学校でもとくに**不等式**を扱うことは少ないはずです。せいぜい $10>5$ や $x\leq 0$ のような使い方がほとんどかと思われます[*1]。理由は、等式に比べて扱いが難しいからでしょう。一般には

- ・$a>b$（a は b より大きい、a は b を超える）
- ・$a<b$（a は b より小さい、a は b 未満）
- ・$a\geq b$（a は b 以上）
- ・$a\leq b$（a は b 以下）

[*1] $\leq$ と $\geq$ は普通、$\leqq$ と $\geqq$ のように書かれる。

のような読み方をしているようです。このように、不等号を読み方と一致させて使うだけなら難しいことはないのですが、記号 $\leq, \geq$ はきちんと定義されているのです。それは

・$a \geq b \quad \Leftrightarrow$ 「$a > b$ または $a = b$」をまとめて記述したもの
・$a \leq b \quad \Leftrightarrow$ 「$a < b$ または $a = b$」をまとめて記述したもの

です。「**または**」は数学表現の一つで、「A または B」と書いた場合、「A であること」と「B であること」の**少なくとも**一方が正しければ「A または B」自体が**真**であると定めています。具体的には、たとえば $5 \geq 5$ と書いた場合、「$5 > 5$ であること」と「$5 = 5$ であること」は前者は正しくないが後者は正しいので、$5 \geq 5$ は正しい表現です。だったら最初から $5 = 5$ だけ書けばよいではないか、と思うでしょうが、数学では文字式を頻繁に扱うので、$x \geq 5$ のような書き方は普通のことで $x = 5$ を代入したときが $5 \geq 5$ なのです。

$\leq, \geq$ の定義は一般的な読み方とは印象が異なります。一度一般的な感覚を身につけると、修正は容易ではありません。しかし数学は本来、日常と異なるものです。数学は人の頭の中にだけ存在するもので、そこから日常に利用できるものを取り出して活用しているに過ぎません。歴史的には、日常の計算や計量を発展させて数学という学問に昇華したのでしょうが、いまや

数学の理論を日常に近似させている

という方が的を射ていると思います。

*不等式の性質

たとえば不等式 $5x - 8 > 1 - 2x$ を解いてみましょう。その前に、不等式にはどのような性質があるか確認する必要があります。

- 不等式の両辺に、同じ値を足してよい。
- 不等式の両辺から、同じ値を引いてよい。
- 不等式の両辺に、同じ**正の**値を掛けてよい。
- 不等式の両辺を、同じ**正の**値で割ってよい（ただし 0 で割れない）。

等式の性質とほぼ同じで、異なるのは両辺に掛けたり割ったりしてよいのは正の値に限ることです。なぜなら、たとえば $10 > 5$ の両辺に単に -1 を掛けるだけでは $-10 > -5$ とすることになり、大小関係がおかしくなります。正しい大小関係は $-10 < -5$ ですね。と言うことは、不等式の場合は負の数で掛ける・割るすることは正しくない結果を招くわけです。

しかし、負の数を掛ける・割るすると大小関係が必ず逆転するのなら、同時に不等号の向きも逆転させれば結果的に正しい大小関係を保つことになるでしょう。したがって

・不等式の両辺に、同じ値を掛けてよい

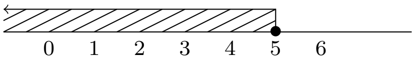
・不等式の両辺を、同じ値で割ってよい（ただし 0 で割れない）

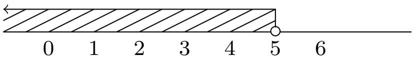
ただし、掛ける・割る値が負の数ならば、同時に不等号の向きを逆にする

と**約束**する必要があります。不等式が等式と異なるのはこの一点だけです。したがって、このことに注意すればば 1 次不等式は 1 次方程式と同様に解けます。

不等号（$<, >$）の感覚

不等式は、負の数で掛ける・割るするときに不等号の向きに注意する以外は、等式と同じ性質をもちます。むしろ不等式は、記号 $<, >$ の感覚に馴染めるかどうかが問題です。たとえば $x \leq 5$ と $x < 5$ は、5 以下と 5 未満との違いは明確です。数直線上に図示するときは





のように、黒丸と白丸で 5 を含むか含まないかを区別します。白丸は 5 を含みません。

図において、黒丸の左側の範囲は明確に意識できるものの、白丸の左側の範囲はどこから、もしくはどこまでなのでしょう。4.9 は $x < 5$ の範囲に含まれます。$4.\overbrace{99\cdots9}^{1\text{ 兆個の }9}$ も $x < 5$ の範囲に含まれます。でも、$4.999\cdots$ は $x < 5$ の範囲に含まれません。なぜなら $4.9\cdots = 5$ だからです。

不等式を扱う場合は、このような機微に触れる感覚が要求されるものです。要は、**無限**の扱いです。正しく無限を知るには、おそらく大学数学までの学習が必要なのですが、中学・高校で不等式 → **極限** → **実数の連続性**と続く途中で、『ああ、分かった』と感じるときと『いや、やっぱりおかしい』と感じるときを交互に繰り返し、やがてしっくりくるときが来るものです。楽しみはそのときまでとっておきましょう。