直角三角形の周辺 –2–

相似な直角三角形

三平方の定理には、まだまだ隠れた能力が潜んでいます。少しだけのぞいてみることにしましょう。

直角三角形を描くとき、3cm, 4cm, 5cm の直角三角形と 6m, 8m, 10m は別物でしょうが、純粋に図形的特徴を取り出せば、どちらも $3:4:5$ の辺の比をもつ相似な図形です。これは何も直角三角形に限ったことではなく、一般の三角形、もっと言えば一般の多角形について言えることです。しかし、多角形の基本は三角形にあるでしょうし、とくに直角三角形は扱いが容易ですから、そこに焦点を当てて考えます。

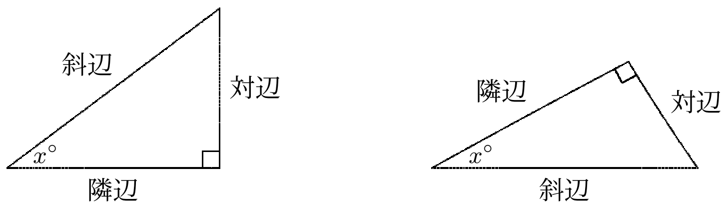
相似な図形を特徴づけるものはなんでしょうか。それは対応する角の大きさです。三角形においては、対応する角が 2 か所等しければ、それらは相似であることが分かります。本当は対応するすべての角が等しいのですが、三角形では 2 つの角の値が決まれば残りは自動的に決まるので、2 つの角が三角形を分類する決め手になっているのです。

このことを直角三角形に限って考えると、直角以外の対応する角がひとつだけ等しければ、それらは相似であることが分かります。直角三角形においては、ただひとつの角の大きさが重要な決め手になっているわけです。だからこそ、直角三角形は扱いが容易になるのです。

三角比へ

ひとつの角の大きさが決まれば、直角三角形がひとつ定まるという事実は重要です。それは、ひとつの角に対してただひとつの直角三角形が対応することを意味します。こういう対応は**一対一対応**と呼びます。

直角三角形のひとつの角に対して直角三角形がどのように変化するか、動的にとらえてみましょう。その前に、直角三角形の各部の呼称を統一しておいたほうがよいかも知れませんね。名称は、重要な決め手になる角（$x°$）を基準として呼ぶことにします。



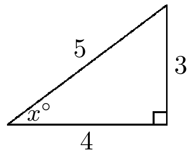
直角に向かい合う辺は**斜辺**と呼ばれます。基準となる角（x°）に向かい合う辺を**対辺**と呼び、斜辺でない隣接する辺は**隣辺**とよびます。このように基準をはっきりさせたおかげで、三角形の描き方によらない統一した呼称を付けることができるのです。

さて、基準となる角の大きさをひとつ決めれば、それと相似な三角形をひとまとめに扱えます。相似な三角形では、対応する辺の比は等しいので、「ひとつの角が x° である直角三角形の辺の比は $a:b:c$ である」といった表現ができるようになります。ただ、この表現では比が連比となっているので扱いに困ります。それに、直角三角形では 2 辺の比が分かれば、残りの辺の比は三平方の定理から求められます。ですから、x° の角をもつ直角三角形の辺の比は、3 つの辺の内 2 つを選んで示せば十分です。どれを選んでも同じことなので、ここでは (対辺) : (斜辺) を選ぶことにします。

これである角度 x° に対して、辺の比の値 $\dfrac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})}$ が一対一に対応したことになります。具体的に $3:4:5$ の直角三角形において、小さいほうの角度を x° とすると

$$x^\circ \text{ の角をもつ直角三角形における } \frac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})} \text{ の値} = \frac{3}{5} = 0.6$$

が成り立ちます。そして、今後は「x° の角をもつ直角三角形における $\dfrac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})}$ の値」を表す記号として「$\sin x^\circ$」を用いることにします[1]。$\dfrac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})}$ の比を**正弦比**と呼ぶことがあるので、$\sin x^\circ$ とは、直角三角形の x° に対する正弦比の値を意味します。



$$x^\circ \text{ に対する } \tfrac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})} \text{ の値} = 0.6$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin x^\circ = 0.6$$

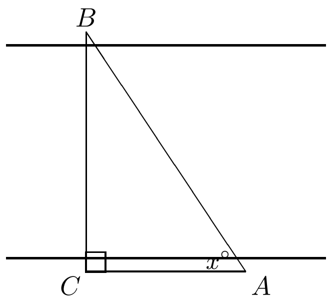
[1]「サイン x°」と読みます。

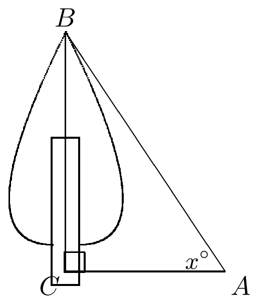
角度の御利益

直角三角形の辺の比がある角度の大きさと一対一に対応することにどんな意味があるのでしょうか。おそらくいちばん注目すべき点は、辺の長さと角度を同一視できることではないでしょうか。それは、こういうことです。

本来なら長さや距離を測定しなくてはならない場合でも、角度を測ればその代用となることでしょう。測量をする際、実際の距離を測りたくても、障害物などがあって直接測定できないことはよくあることです。そんなとき、角度を測ることで代用できるなら、これほど便利なことはないでしょう。

実際にあったかどうかは別にして、川に橋を架ける場面を想像してみたいと思います。





橋を架けるには川幅を知らなければなりません。川を泳いで渡って川幅を測るのもひとつの方法かも知れませんが、直角三角形を利用すれば川を渡る必要はありません。さらに、川幅が分かってもそれに見合う木を見つけなければなりません。当てずっぽうに木を切って調べるより、切る前に木の高さが分かれば申し分ないはずです。ここでも、直角三角形が役立つはずです。

この図では、いずれの場合も $\angle A$（$= x^\circ$）の大きさと AC の長さを測るだけでよいのです。これだけの情報でその縮図を作図することができますから、縮尺の度合いを使って BC の長さは計算できます。ここでは、もう一歩踏み込んで $\sin x^\circ$ の値を利用して BC を求める方法を述べます。

その前に、直角三角形のひとつの角に対する正弦比は、丁寧な作図によりあらかじめ知ることができるはずですから、ここではその数表があるものとしておきます。つまり $\sin x^\circ$ の値は既知であるとします。しかし、いま知りたい値はどちらも BC で、この場合 $\sin x^\circ$ を考えたところで、$\sin x^\circ = \dfrac{BC}{AB}$ ですから、この等式では AB が分からない限り BC の値は求められません。

そこで発想を変えましょう。$\angle A$ の値が分かっているということは、$\angle B$ の値も分かるということです（$\angle B = 90^\circ - x^\circ$ なので $\angle B = 90^\circ - x^\circ = y^\circ$ とおきます）。するとそれに伴って $\sin y^\circ$ の値も既知になります。それなら、$\sin y^\circ = \dfrac{AC}{AB}$ を考えれば、$\sin y^\circ$ と AC が分かっている値なの

で、AB を求められます。AB が分かれば、AC と三平方の定理を用いて BC が計算できるという寸法です。

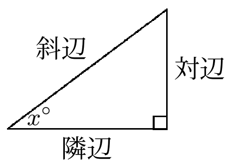
ちょっと手間ですが、川を渡ったり木に登ったりすることを思えば楽ではないでしょうか。

他の三角比

測量の例を示したものの、ちょっと手間がかかっていたようです。その理由は、辺の比に正弦比を用いたことにあります。前に述べたように、直角三角形の辺の比は 3 つの辺の内どの 2 つを選んでも同じことなので、(対辺) : (斜辺) を選んで正弦比としたわけです。どの辺を選んでも同じことなら、(隣辺) : (斜辺) を選んでも (対辺) : (隣辺) を選んでも同じはずです。実際、(隣辺) : (斜辺) を**余弦比**、(対辺) : (隣辺) を**正接比**と呼んで利用できるのです。これらはそれぞれ

$$\begin{aligned} x^\circ \text{ に対する } \frac{(\text{隣辺})}{(\text{斜辺})} \text{ の値} &= \cos x^\circ \\ x^\circ \text{ に対する } \frac{(\text{対辺})}{(\text{隣辺})} \text{ の値} &= \tan x^\circ \end{aligned}$$

と定義しているのです[2]。

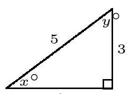


$$\cos x^\circ = \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$$

$$\tan x^\circ = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$$

もし、これらの三角比が使えるなら、先ほどの例で BC を求めるときに $\tan x^\circ = \dfrac{BC}{AC}$ として、一度で目的の長さが求められたことになります。

*** *** **問　題** *** ***

1. 

について、$\sin x^\circ$、$\cos x^\circ$、$\tan x^\circ$、$\sin y^\circ$、$\cos y^\circ$、$\tan y^\circ$ を求めてください。

2. 三角定規を思い出してください。さて、$\sin 30^\circ,\ \cos 30^\circ,\ \tan 30^\circ$ の値を求めてください。また、$\sin 45^\circ,\ \cos 45^\circ,\ \tan 45^\circ,\ \sin 60^\circ,\ \cos 60^\circ,\ \tan 60^\circ$ の値も求めてください。

[2] それぞれ「コサイン x°」「タンジェント x°」と読みます。

3. 川幅の測量において、$\angle A = 60^\circ$, $AC = 10\mathrm{m}$ であったとします。川幅を求めてください。$\sqrt{3} \approx 1.73$ としておきましょう。

** ** ** ** **

◆ 三角比と三平方の定理の関係 ◆

三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$ を見直してみましょう。これは等式ですから、両辺を同じ数でわることができます。そこで、両辺を c^2 でわると

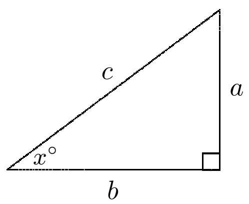
$$\begin{aligned} \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= 1 \\ \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 &= 1 \quad (☆) \end{aligned}$$

となります。

ここで、$\dfrac{a}{c} = \sin x^\circ$、$\dfrac{b}{c} = \cos x^\circ$ であったことを思い出してください。すると（☆）は

$$(\sin x^\circ)^2 + (\cos x^\circ)^2 = 1 \quad (★)$$

と書き直すことができますね。式は、正弦比と余弦比の平方和が定数 1 になることを意味していて、形の上でもきれいな関係式になっていると思います。



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Updownarrow$$

$$(\sin x^\circ)^2 + (\cos x^\circ)^2 = 1$$

けれど、結局は等式を変形しただけなので、本質は三平方の定理と同じじゃないかと感じるかも知れません。三角比に十分なじんでない者にとっては、むしろ迷惑な変形でしょうか。でも、（★）は三角比を発展させるために欠かせない関係なのです。ここでは詳しく述べませんが、（★）が意味することは、$\sin x^\circ$ と $\cos x^\circ$ の値の組が、半径 1 の円周上にあることを注意しておきます。そして、そのことが三角比を**三角関数**へ拡張させるのです[3]。

[3] 三角比の拡張という意味で「三角関数」と呼びますが、円周上で定義できる関数という点では「円関数」と呼んでもよいでしょう。