直角三角形の周辺 –1–

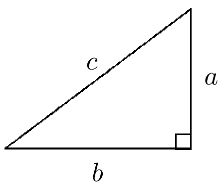
三平方の定理

直角三角形には特別なものがあります。とくに辺の比が $3:4:5$ である三角形は、はるか昔から知られていたようです。ものの本によれば、一本の縄を $3:4:5$ に区切ってピンと張ると直角ができることを利用して、測量に使った話などが紹介されています。

さて、その 3, 4, 5 の数が $3^2+4^2=5^2$ の関係にあると見るのは、あまりに特殊な見方です。むしろ、一般に直角三角形の 3 辺の長さを a, b, c としたとき、

$$a^2+b^2=c^2 \tag{1}$$

の関係が成り立つことに気づいたのが先かも知れません（☆）。その上で、たしかに 3, 4, 5 でも (1) が成り立つので、辺の比が $3:4:5$ である三角形が間違いなく直角三角形であると確認できたのでしょう（★）。これが**三平方の定理**と呼ばれるものです[1]。



$$\overset{(☆)}{\Longrightarrow} \quad a^2+b^2=c^2$$
$$\underset{(★)}{\Longleftarrow}$$

ここで重箱の隅をつつくような話をさせてもらいます。文中、（☆）の事実から（★）が正しいことを確認したように書きましたが、（☆）と（★）では言ってることが少し違います。（☆）は、直角三角形を描いた場合、3 辺には (1) なる関係が成立すると述べています。一方（★）は、(1) なる関係の長さで三角形を作ると、それは直角三角形になると述べています。つまり、述べる順番が逆なんですね。

もっとも、三平方の定理では（☆）と（★）は**同値**—すなわち全く同等のことがら—ですから、（☆）の事実から（★）が正しいことを確認してかまいません。しかし、一般には述べる順番を逆

[1]ピタゴラスの定理ともいう。

にすると、全く同等のことを述べていないこともあるので注意が必要です。たとえば

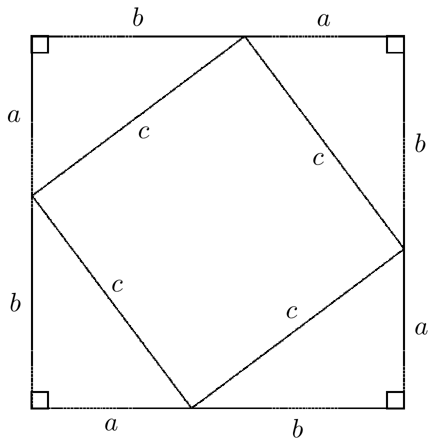
A: 正方形の 4 つの角は直角である
B: 4 つの角が直角なら正方形である

は、互いに述べる順番が逆です。そして、同等のことを述べていないのです。なぜかは後の問題で考えてもらいましょう。

三平方の定理の証明

では、三平方の定理が正しいことを示しておきましょう。

まずは（☆）のほう、すなわち「直角三角形を描けば $a^2+b^2=c^2$ の関係が成立する」ことを示します。それには、描いた直角三角形と**合同**な三角形を 4 つ用意し、図のように正方形を形作るように置きます。



4 つの直角三角形を置くとき、a の辺と b の辺が一直線になるようにすれば正方形を形づくれることを確認してください。すると、内側にできる四角形が正方形になることに注意しましょう。

ここで、直角三角形の各辺を a, b, c とすると、直角三角形ひとつの面積は $\dfrac{1}{2}ab$ ですね。また、外側の正方形の面積が $(a+b)^2$ で、内側の正方形の面積が c^2 であることも分かるでしょう。準備は整いました。

(外側の正方形) $=$ (直角三角形) $\times 4 +$ (内側の正方形) ですから、等式

$$(a+b)^2 = \frac{1}{2}ab \times 4 + c^2$$

が成り立ちます。展開し整理すると $a^2+b^2=c^2$ が現れます。これで、直角三角形があれば必ず $a^2+b^2=c^2$ が成立することが分かりました。

次は（★）のほう、すなわち「$a^2+b^2=c^2$ が成立すれば直角三角形が描ける」ことを示します。それには、$a^2+b^2=c^2$ を満たす a, b, c を用いて三角形を描くところから始めますが、何よりもこの a, b, c で三角形が描けることを示さなくてはなりません。ただし（★）の解釈を「三角形を描いた上で $a^2+b^2=c^2$ が成立すれば、それは直角三角形である」ととれば、回りくどいことを考える必要はありません。でも、あえてやっておきましょう。

いまは図形の話をしているので、当然 $a,\ b,\ c>0$ です。$a^2+b^2=c^2$ の条件から $a,\ b,\ c$ が三角形の辺になり得ることを示すには

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$$

を言う必要があります。

$a+b>c$ を示します。$a^2+b^2=c^2$ が成立しているところに、左辺にだけ正の数を加えれば、当然左辺のほうが大きくなります。そこで、左辺にだけ $2ab$ を加えると

$$\begin{array}{rcl} a^2+b^2 &=& c^2 \\ a^2+b^2+2ab &>& c^2 \\ (a+b)^2 &>& c^2 \\ a+b &>& c \end{array}$$

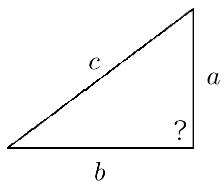
となって、$a+b>c$ であることが言えました。

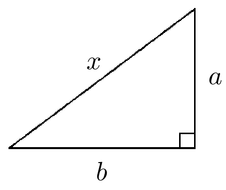
続いて $b+c>a$ を示します。$a^2+b^2=c^2$ は $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$ と変形できます。ここで $c-b$ より $c+b$ が大きいのは明らかなので、$a^2=(c-b)(c+b)$ の右辺に使われている $(c-b)$ を $(c+b)$ に換えれば、当然右辺のほうが大きくなるので

$$\begin{array}{rcl} a^2 &=& (c-b)(c+b) \\ a^2 &<& (c+b)(c+b) \\ a &<& c+b \end{array}$$

となって、$b+c>a$ であることも言えました。$c+a>b$ についても同様です。

さあ、これで $a^2+b^2=c^2$ が成立すれば必ず三角形ができることが確認されたので、それが直角三角形であることを示しましょう。まず、a, b, c の辺をもつ三角形を描きます。この時点では、ただ $a^2+b^2=c^2$ が成立する辺をもつ三角形を描いただけなので、$\angle ?$ が直角である保証はどこにもありません。? の大きさは不明なのです。





ところで、a, b, c の 3 辺を使わず a, b だけを使えば、その間の角が直角である三角形は描くことができます。ただし、今度は斜辺の長さがどうなっているかは分かりません（斜辺を x とします)。しかしこれは直角三角形ですから、$a^2 + b^2 = x^2$ にはなっています。

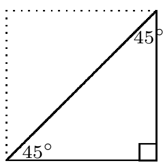
ここで最初の条件を思い出してください。たしか最初は $a^2 + b^2 = c^2$ でしたから、$a^2 + b^2 = x^2$ の x は c に等しいことになります。すなわち 2 つの三角形は 3 辺とも長さが等しいことになり、合同であることが分かりました。合同な三角形は対応する角も等しいので、? は直角です。ゆえに、$a^2 + b^2 = c^2$ が成立している三角形は直角三角形しかあり得ません。

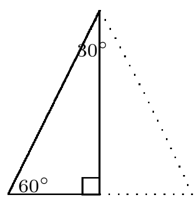
*** *** 問　題 *** ***

1.「正方形の 4 つの角は直角である」ことと「4 つの角が直角なら正方形である」ことが同値でない理由を説明してください。

2. 三平方の定理の証明（☆）において、内側にできる四角形が正方形であることを証明してください。

3. 三角定規には、正方形を半分に切ったものと正三角形を半分に切ったものの 2 種類があります。このことから三角定規の 3 辺の長さの比を求めることができます。辺の比を求めてください。





**　**　**　**　**

◆ 必ず直角三角形になる式 ◆

辺の比が 3 : 4 : 5 や 5 : 12 : 13 などの直角三角形はよく知られています。他にどんな比をもつ三角形が直角三角形になるか調べることは、$a^2+b^2=c^2$ を満たす a, b, c を見つけることでもあります。でも、a や b の値を思い付くままに決め、それが平方数になっているかどうかで c の値を特定する方法では効率がよくありません。

そこで $a=m^2-n^2, b=2mn$ として a^2+b^2 を計算すると

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (m^2-n^2)^2+(2mn)^2 \\ &= m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2 \\ &= m^4+2m^2n^2+n^4 \\ &= (m^2+n^2)^2 \end{aligned}$$

のように、うまい具合に平方数ができあがります。これが c^2 にあたるわけです。つまり、労せずして必ず $a^2+b^2=c^2$ を満たす a, b, c を見つけることができるのです。

適当に m, n を決めて a, b, c を求めてみましょう。

$(m,\ n)$	$(2,\ 1)$	$(3,\ 2)$	$(4,\ 1)$	$(4,\ 3)$	$(5,\ 2)$	$(5,\ 4)$
a	3	5	15	7	21	9
b	4	12	8	24	20	40
c	5	13	17	25	29	41

結構簡単に見つかるものですね。中には $(m,\ n)=(3,\ 1)$ として $a=8, b=6, c=10$ を得ても、本質的に $(m,\ n)=(2,\ 1)$ の場合と同じであったりするものも多くあります。いわゆる**相似**形です。

では、この式から相似形を除いて無数の直角三角形が得られるのでしょうか。また、この式から作れない別の直角三角形はあるのでしょうか。

はじめの問いに対する回答は「はい」です。ここから無数の直角三角形が作れます。次の問いに対する回答は「いいえ」です。つまり、直角三角形の 3 辺は $m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2$ に限るのです。もっとも、その証明にはこの先の知識を必要とするので、ここでは述べられませんが。