数直線を飛び出して –2–

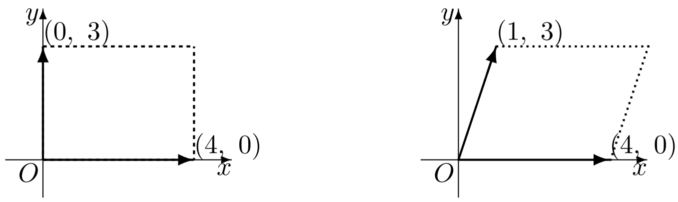
かけ算の別の顔

さて、たったいま $(2,\ 4) \times 5 = (2,\ 4) \times (5,\ 0)$ と考えて失敗してしまいました。その原因はどこにあるのでしょうか。それは、$5 \to (5,\ 0)$ としたことではありません。すでに述べたように、この見方は数をベクトルと考える際の基本事項なのですから。問題は別のところに潜んでいます。

$5 \to (5,\ 0)$ と見なすのはよいのですが、これを $5 = (5,\ 0)$ としたことが失敗の原因です。5 は実数なのでスカラー倍の計算に用いることができても、$(5,\ 0)$ は実数でないからです。実数でないものをスカラー倍の計算に用いたのが間違いだったのです。

実は、かけ算には 2 通りの見方があって、たとえば $2 \times 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ と見るのがスカラー倍の考えで、これは数直線上で矢線をつなぐ計算にあたります。もうひとつの見方は、たし算の延長ととらえず、長方形の縦・横をかけた面積と考えるものです。これは、数直線上に収まる計算ではありません。ベクトルどうしの計算はスカラー倍ではないのですから、かけ算を導入するなら、面積の考えを基本にするのが自然でよいと思われます。

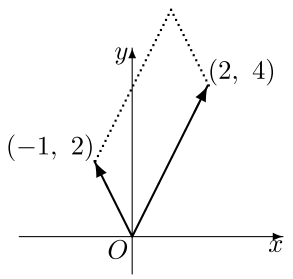
具体例で考えることにします。

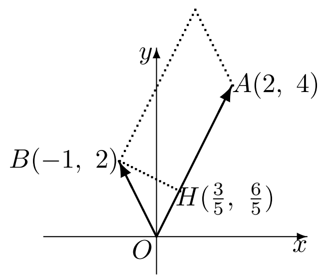


もし、$(4,\ 0) \times (0,\ 3)$ を 2 つのベクトルで作られる長方形の面積の計算と考えるなら、$(4,\ 0) \times (0,\ 3) = 12$ ということです。すると $(4,\ 0) \times (1,\ 3)$ は 2 つのベクトルで作られる平行四辺形の面積の計算と考えられます。平行四辺形の面積は (底辺) × (高さ) ですから、この場合、面積は変わらず 12、すなわち $(4,\ 0) \times (1,\ 3) = 12$ です。

ベクトルの外積

それでは、もう少し一般的な場合を考えましょう。$(2,\ 4) \times (-1,\ 2)$ ではどうなるでしょうか。





まず、平行四辺形の高さを求めるために、$(-1,\ 2)$ からベクトル $(2,\ 4)$ へ垂線をおろすことにします。あとで一般的な考察をする際に述べますが、この場合垂線の足は $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$ であることが分かります。底辺と高さはこれらの座標を元に三平方の定理から求めることができます。それらは

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5} \\ BH &= \sqrt{\left(\frac{3}{5}-(-1)\right)^2+\left(\frac{6}{5}-2\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

と計算できますから、平行四辺形の面積は $2\sqrt{5}\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ です。このことから

$$(2,\ 4)\times(-1,\ 2) = 2\sqrt{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{5} = 8$$

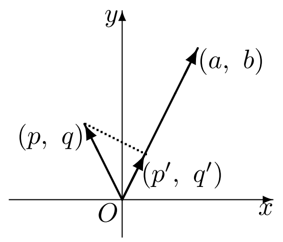
と考るのです。

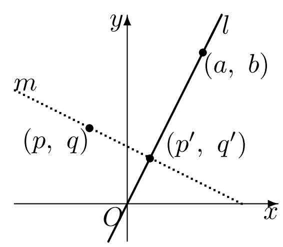
このようにすれば、ベクトルにも積を導入できることが分かりました。この計算は**ベクトルの外積**と呼ばれています。

外積の一般的な計算

以上のように、2 つのベクトルの外積を計算できるようになったのはよいのですが、その都度図形的な考察をして、平行四辺形の高さを特定するのでは大変です。ベクトルの外積がどんな仕組みなのか調べてみましょう。

まず、2 つのベクトルとして $(a,\ b)$ と $(p,\ q)$ を考えます。この先の計算のために、それぞれのベクトルは直線 l、m に乗っているものとします。





はじめに、ベクトル $(p,\ q)$ の終点から下ろした垂線の足 $(p',\ q')$ を計算します。その前に、直線 l、m の方程式が分からなくてなりませんので、それを求めておきましょう。まず、直線 l の式は $y=\dfrac{b}{a}x$ です。そして、直線 m は l に直交していることから、$y=-\dfrac{a}{b}x+\square$ であることが分かります。(傾きが $-\dfrac{a}{b}$ であることは、問題の中で考えてもらいましょう。)

そして、m 上に点 $(p,\ q)$ があることから $x=p,\ y=q$ を代入できます。そのとき m の式は $q=-\dfrac{a}{b}p+\square$ となるので、$\square=\dfrac{ap+bq}{b}$ と解けます。その結果 m の式が $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{ap+bq}{b}$ であることが分かるのです。

次に、$(p',\ q')$ は l、m の交点です。そこで、l と m の連立方程式、すなわち

$$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x \\ y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{ap+bq}{b} \end{cases}$$

を解いて

$$(x,\ y)=(p',\ q')=\left(\frac{a(ap+bq)}{a^2+b^2},\ \frac{b(ap+bq)}{a^2+b^2}\right)$$

を求めることができるのです。(本当にこうなることの確認は練習問題としておきましょう。)

さあ、これで垂線の足の座標が特定できたので、外積の計算に入ることができます。三平方の定理より

$$\begin{aligned}(a,\ b)\times(p,\ q) &= ||(a,\ b)||\times||(p-p',\ q-q')|| \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{\left(p-\frac{a(ap+bq)}{a^2+b^2}\right)^2+\left(q-\frac{b(ap+bq)}{a^2+b^2}\right)^2}\end{aligned}$$

です。ここで記号 $||(x,\ y)||$ は、原点 O と点 $(x,\ y)$ 間の距離を表すものとします。

何だか大変な計算式になりそうです。しかし、よく見ると同じような文字の固まりが目につきます。こんなときは、適当に置き換えて計算するのが得策です。そこで

$$\frac{ap+bq}{a^2+b^2}=M \qquad (※)$$

とおきます。このようにおくと、$(a^2+b^2)M=ap+bq$ であることに注意してください。この関係式は計算途中で 1 回お世話になりますから。(お世話になった行に☆をつけました。)

では、計算を再開しましょう。

$$\begin{aligned}(a,\ b)\times(p,\ q) &= \sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{(p-aM)^2+(q-bM)^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{p^2-2apM+a^2M^2+q^2-2bqM+b^2M^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{p^2+q^2-2(ap+bq)M+(a^2+b^2)M^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{p^2+q^2-2(ap+bq)M+(ap+bq)M} \qquad (☆)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{p^2+q^2-(ap+bq)M} \\
&= \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{p^2+q^2-\frac{(ap+bq)^2}{a^2+b^2}} \qquad \text{（※より）} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(p^2+q^2)-(ap+bq)^2} \\
&= \sqrt{a^2q^2-2abpq+b^2p^2} \\
&= \sqrt{(aq-bp)^2} \\
&= |aq-bp|\ .
\end{aligned}
$$

最後の式にある記号｜ ｜は絶対値記号で、必ず正の値にするためのものです。

驚いたことに、ベクトルの外積の計算は実に簡単な式となって私たちの目の前に現れました。つまり、この結果を利用すれば、外積の値を計算するために図形的考察は不要なわけです。そしてこのことは、平行四辺形の面積を求めるためには、2 辺のベクトルの終点の座標さえ分かれば計算ができることを意味するのです。

***　***　**問　題**　***　***

1. 一般に $y=\dfrac{m}{n}x$ の直線に対して、これに垂直に交わる直線の傾きは $-\dfrac{n}{m}$ であることを示してください。

2. 外積の一般的な計算で、$\sqrt{(aq-bp)^2}=|aq-bp|$ と書きましたが、なぜ $\sqrt{(aq-bp)^2}=aq-bp$ ではいけないのでしょうか。

3. 3 点 $(0,\ 0)$、$(3,\ 1)$、$(-4,\ 2)$ で囲まれる三角形の面積を求めてください。また、3 点 $(-1,\ -1)$、$(-2,\ 5)$、$(8,\ 3)$ で囲まれる三角形の面積を求めてください。

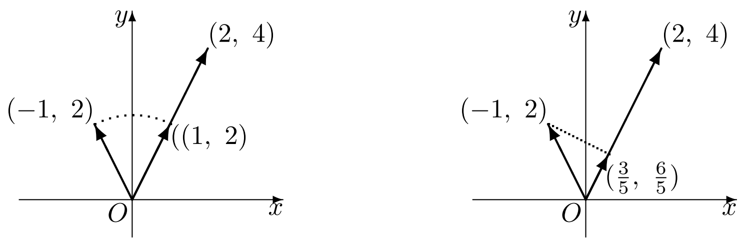
4. ベクトルの外積が、ベクトルのスカラー倍や実数どうしのかけ算を内包していることを確かめてください。

**　**　**　**　**

◆ もう一つの積—内積 ◆

かけ算を面積と考えず、あくまでも数直線上での操作である—すなわちスカラー倍の延長と考える—とするなら、平面内を四方八方へ向かうベクトルに積の概念を導入することは難しいものです。しかし、2 つあるベクトルが同じ直線に乗っていれば、その直線を数直線とみなすことはでき

そうです。ただ、ベクトルを同じ直線に乗せると言っても、そうそう方法があるわけではありません。ここでは、ベクトル $(-1,\ 2)$ をベクトル $(2,\ 4)$ 上に乗せることを考えてみます。



ひとつの方法は、ベクトルを原点を中心に回転させもうひとつのベクトル上へ移動させること。別の方法は、ベクトルの終点をもうひとつのベクトルに対して垂直に下ろすことでしょうか。一見、回転させる方がベクトルのありのままの姿を利用できてよい気がします。しかしそれでは、同じ円周上のベクトルがすべて同じ "数" として扱われるので、ベクトルの差異がなくなってしまいます。そこで、ベクトルを数直線上に持ってくるときは、ベクトルの終点をもうひとつのベクトルに対して垂直に下ろす―これを**正射影**と呼びます―ことによって行うものとします。

そのように考えれば $(2,\ 4) \to \left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$ です。これで、2 つのベクトルが同じ直線に乗ったわけですから、この直線を数直線と考えてしまいましょう。ただし、数直線上におけるベクトルの大きさは原点からの距離のことですから、三平方の定理より、それぞれ $2\sqrt{5}$ と $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ となることは本文で述べた通りです。よって、この考えによる積は

$$(2,\ 4) \cdot \left(\frac{3}{5},\ \frac{6}{5}\right) = 2\sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = 6$$

です。ここで、かけ算の記号として $\cdot$ を使ったのは、さっきの $(2,\ 4) \times (-1,\ 2)$ の計算と区別するためです。この方法によるかけ算は**ベクトルの内積**と呼ばれ、外積とは違う面で有用な積になっているのです。

ついでながら、内積の一般的な計算を外積のときと同じように行うと、思いのほか簡単な式

$$(a,\ b) \cdot (p,\ q) = ap + bq$$

が現れて結構感動するのですが、途中計算は省略します。でも、計算に取り組もうという人のために少しだけ。この場合は、

$$(a,\ b) \cdot (p,\ q) = ||(a,\ b)|| \cdot ||(p',\ q')||$$

であることに注意すれば、外積の計算よりはるかにあっさりと計算できます。

最後に内積の図形的性質について話しておきましょう。内積で求められる値は、図形の面積のような目に見える値ではなく、値そのものに特別な意味はありません。ただ、内積の値が 0 になる

ときは図形的に大きな意味を持っています。それは、2 つのベクトルが直交していることを表しているからです。このために、ベクトルの内積は外積と同等な地位を占めていると言ってもよいでしょう。