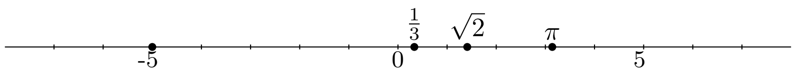
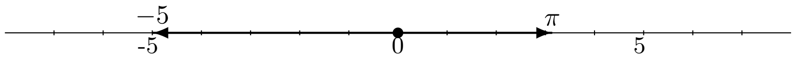
数直線を飛び出して –1–

数直線と矢線

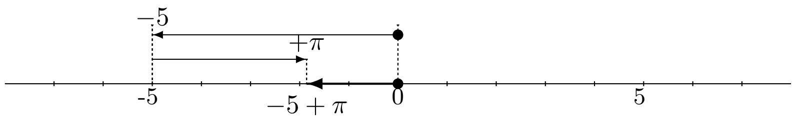
数学には “数” がつきものです。ひとくちに数と言っても、-5, $\dfrac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, π, ... など様々なものがあります。こういった様々な数を表すには**数直線**が適していて、点を打つことでその位置が示せます。



数直線上に点を打つ行為は、一目で数の位置が分かって便利なのですが、実は数の計算には不向きなものです。数の計算を数直線上で行うことを考えたら、数は “矢線” で表すのがよいのです。まず、数を矢線で表すことの意味ですが、-5 や π を矢線で示した次の図を見れば一目瞭然ですね。



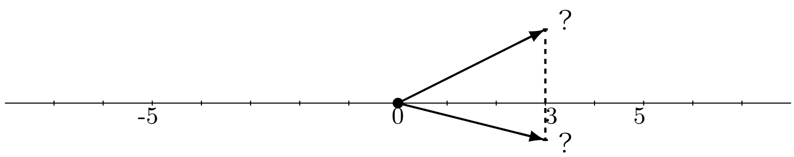
矢線によるたし算を考えましょう。“たすこと” は “継ぎ足すこと” ですから、$-5+\pi$ の計算は図のように、-5 の矢線に π の長さの矢線を継ぎ足すだけです。もちろん、継ぎ足しは数直線上に矢線を重ねることを意味しますが、見やすくするために矢線を離して描いてあります。



$-5+\pi$ だと大きさの実感がわきませんが、このように矢線を継ぎ足して描くと -2 の手前の数であることがはっきりします。この調子で、ひき算をしたりかけ算をしたりできるのですが、それは本題ではないので、もっとすごい世界に目を向けてみようと思います。

矢線は踊る

数直線上に点を打つ行為は、誰がやっても線上に点を打つに違いありません。ところが、原点—つまり 0 の位置—から矢線を引く行為は、場合によっては線上に乗らないように引くことがあるかもしれません。あまのじゃくな人なら、きっとそうするでしょうね。



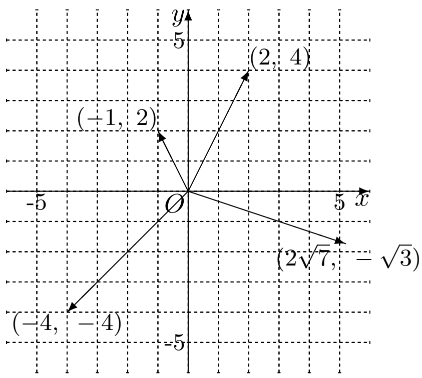
こんなのは反則だよ、と済ませてもよいのですが、ここでは思いきった飛躍をすることにします。飛躍とは、これらを "数直線外の数" であると考えてしまうのです。なんと、強引ですね。じゃあ、これらの矢線は一体いくつなのでしょう？

いちばん簡単な考えは、これらがいずれも数直線上の 3 の位置の上下にあることから 3 とする、というものです。でも、これでは数直線外の数であっても数直線上の数と変わらないことになって、飛躍したことになりません。どう考えたら飛躍と呼べるのでしょうか。

実は、数を数直線の外に飛躍させるのは結構なことですが、それを測る物差しがないことが問題です。数直線の上下に矢線を描くのであれば、上下方向にも数直線同様の目盛が必要です。それには、そう、xy 座標が使えそうです。

ベクトルの和とスカラー倍

そこで私たちは、数直線にもうひとつの数直線を直交させた、xy 平面を持ち出すことにします。xy 平面上であれば、原点から伸びる矢線がどこにゆこうとも、その位置を数値で特定することができます。たとえば、次の図の矢線は、それぞれ位置として $(2,\ 4)$, $(-1,\ 2)$, $(-4,\ -4)$, $(2\sqrt{7},\ -\sqrt{3})$ を表しています。



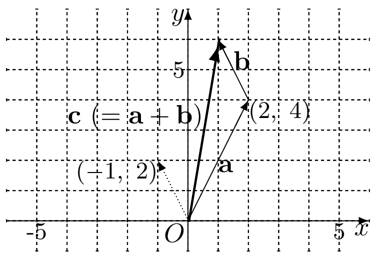
これらは本当に数として意味があるのでしょうか。結論から言えば、純粋に数と呼ぶには抵抗があるものの、数の性質は備えています。実際は、これらの "数" は**ベクトル**と呼ばれていて、数的な便利な性質を持っているのです。

その性質を示す前に、どのようなものをベクトルと呼ぶか決めておきます。ここでは、ベクトルとは "方向と長さを持つ矢線" と定義しておきます。日常的には、風向・風力を矢線で表したり、

力の向き・大きさを矢線で表したりしますから、決して妙な定義ではないと思います。

その上で、ベクトルの和を定義します。それは、数直線上の矢線の和と同様、矢線の継ぎ足しをベクトルの和と決めます。具体例として、さっきの矢線 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 2)$ に再登場願いましょう。話の進行上、ここではそれらを $\mathbf{a}=(2,\ 4)$, $\mathbf{b}=(-1,\ 2)$ と呼んでおきます。a や b をボールド体で表した理由は、ベクトルがこれまでの数と違って、複数の値を持っているからです。$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のように書く流儀もありますが、いまのところ方向性よりも数であることを強調したいので $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ と書くことにします。

さて、ベクトルの和である $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ は図のような継ぎ足しで求められます。$\mathbf{b}$ は本来原点 O から $(-1,\ 2)$ へ向かうベクトルです。しかし、継ぎ足すために平行移動をしていますが、これは数直線上における矢線の継ぎ足しと同じ操作であることに注意してください。



継ぎ足した結果できるベクトルを $\mathbf{c}$ とすれば、$\mathbf{c}=(1,\ 6)$ であることが分かります。このことから、私たちは

$$(2,\ 4)+(-1,\ 2)=(1,\ 6)$$

という、ベクトルどうしの和を求めたことになりますが、見てのとおり、単純に x 座標どうしの和と y 座標どうしの和を求めたに過ぎません。

このことは、他のどんなベクトルに対しても成り立つことは容易に想像できるでしょう。つまり、ベクトルの和は、かなり自然な形で定義できるものなのです。これは大変意義あることで、たとえば物体に働く力を合成する場合、合成を作図することなく計算だけで結果を求められることにつながるからです。

ベクトルに和を導入できるとなれば、同じベクトル $\mathbf{a}$ を 5 個たすこと、すなわち $\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}$ も理解しやすいでしょう。$\mathbf{a}=(2,\ 4)$ で考えると

$$(2,\ 4)+(2,\ 4)+(2,\ 4)+(2,\ 4)+(2,\ 4)=(10,\ 20)$$

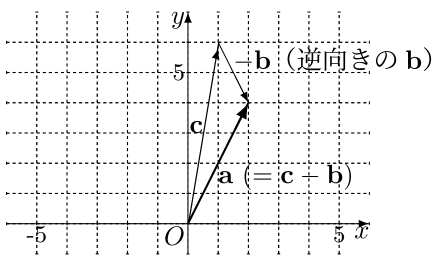
ですから

$$(2,\ 4)+(2,\ 4)+(2,\ 4)+(2,\ 4)+(2,\ 4)=(2,\ 4)\times 5=(2\times 5,\ 4\times 5)$$

となっていることにも気づくはずです。つまり、ベクトルを定数倍すること—これを**ベクトルのスカラー倍**と呼びます—もまったく自然な計算だということです。

ベクトルの差と逆ベクトル

ベクトルの和が普通の計算同様にできるものなら、差も同様にできてしかるべきです。先ほどの $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ が $(2,\ 4)+(-1,\ 2)=(1,\ 6)$ であるなら、$\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{a}$ ですから $(1,\ 6)-(-1,\ 2)=(2,\ 4)$ を考えることができます。たしかに、計算上は x 座標と y 座標のひき算になっているので、計算としては正しい気がします。では、ベクトルどうしのひき算にはどのような意味付けができるのでしょうか。



これについては、図をよく見ると理解できます。ベクトルの和において $\mathbf{c}$ は、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の継ぎ足しでした。それに対しここでの $\mathbf{a}\ (=\mathbf{c}-\mathbf{b})$ は、$\mathbf{c}$ に逆向きの $\mathbf{b}$ を継ぎ足したように見えます。つまり $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ とは、$\mathbf{c}+(\text{逆向きの } \mathbf{b})$ を意味するのです。そこで、逆向きの $\mathbf{b}$ をその意味から考えて $-\mathbf{b}$ で表すとすれば、$\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{c}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}$ の関係が浮かぶことになり、結局、ベクトルの差はベクトルの和に帰着できるのです。そのために逆向きのベクトル—**逆ベクトル**という—を考える必要が生じますが、負の符号を付けることが数直線上で逆向きの矢線を意味するのと同じく、ごく自然な考えであると思われます。

ところで、$-\mathbf{b}$ は座標を用いてどのように表すべきでしょうか。そのことを知るには、$-\mathbf{b}$ を原点を始点とする位置へ平行移動すればよいのです。そうすれば $-\mathbf{b}=(1,\ -2)$ であることが分かります。もちろん、数値計算をして $-\mathbf{b}=-(-1,\ 2)=(1,\ -2)$ と考えることができますから、ベクトルも数直線上の矢線と同じ性質であると言えるわけです。

ベクトルをかけてみよう

これでベクトルに対して、和・差・積が導入されたことになります。じゃあ次は商だね、と思うのはちょっと気が早い。それはなぜかというと、先ほどの例 $(2,\ 4)\times 5=(10,\ 20)$ は、ベクトルと

普通の数をかけただけで、ベクトルどうしでかけ算をしたわけではないからです。本当にベクトルの積と言うには、やはり $(2,\ 4) \times (-1,\ 2)$ の計算ができなくてはらないでしょう。

それなら、ベクトルのたし算が

$$(2,\ 4) + (-1,\ 2) = (2 + (-1),\ 4 + 2) = (1,\ 6)$$

であったことを引き継いで、かけ算を

$$(2,\ 4) \times (-1,\ 2) = (2 \times (-1),\ 4 \times 2) = (-2,\ 8)$$

とするのはどうでしょう。なかなか分かりやすくてよい気がします。

でも、残念なことにこの定義はすでに破綻しています。というのは、いま私たちが考えているベクトルは、数直線からはみ出た矢線が考えの始まりです。そのため、数直線上で 5 を表す数は、xy 平面の中では $5 \to (5,\ 0)$ と見るべきです。すると、いまひねり出したかけ算の定義で計算すると

$$(2,\ 4) \times 5 = (2,\ 4) \times (5,\ 0) = (10,\ 0) \neq (10,\ 20)$$

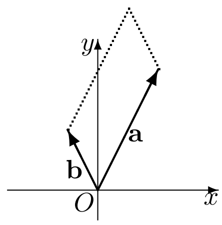
となって、ベクトルの実数倍の答と合わなくなってしまうからです。

これでは、数を拡張することで混乱を招くだけなので、このような約束はできません。少し違った角度から見直す必要がありそうです。

***　***　問　題　***　***

1. 3 つのベクトル $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ を考えます。ベクトルでも、実数の計算法則—すなわち $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$ [[加法の交換法則]]、$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ [[加法の結合法則]]—が成り立つことを説明してください。

2. 図のようにベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を描くと、2 つのベクトルを元に平行四辺形を作ることができます。さて、このとき平行四辺形の対角線がそれぞれ $\mathbf{a}+\mathbf{b}$、$\mathbf{a}-\mathbf{b}$ であることを確かめてください。



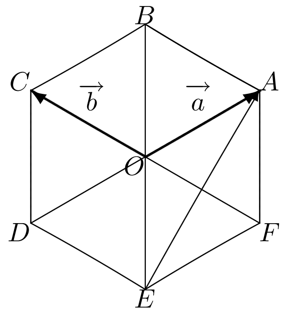
3. $\mathbf{a} = (1,\ 1)$、$\mathbf{b} = (-1,\ 1)$ とし、$\mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ を考えます。$t = \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$ のそれぞれについて、$\mathbf{c}$ がどんなベクトルになるか観察してください。

**　**　**　**　**

◆ ベクトルの方向性に目を向けて ◆

本文では、ベクトルの数的性質に目を向けながら進めていますが、ベクトルは本来方向性も併せ持っています。場合によっては、数値を考えず方向性だけ見る方がよいこともあります。そのことを示すために、正 6 角形を用意しました。対角線が交差しているところを O とし、ベクトルの起点としましょう。

また、ここでは方向性を強調したいので、ベクトルを $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のような "$\rightarrow$ 表記" を用いましょう。図形の頂点を用いれば $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OC}$ と表すこともできます。



さて、ここで xy 平面でベクトルを継ぎ足したことを思い出してください。ベクトルは、数直線上の矢線と同様に自由に平行移動をして、継ぎ足すことができました。このことは、平行移動して重なるベクトルは等しいベクトルと見なせるということを意味します。

したがって図の正 6 角形では、$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ と見たら $\overrightarrow{DO}$ や $\overrightarrow{CB}$ も $\overrightarrow{a}$ と見てよいのです。

すると、正 6 角形のある頂点から別の頂点へ向かうベクトルを $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で表せるようになります。たとえば $\overrightarrow{EA}$ であれば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EA} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \\ &= 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

のように表せるのです。