数から極限へ –2–

有限と無限

有理数は簡単な整数比で表すことができるので、扱いも易しいと考えがちです。しかし、ひとたび小数で表すとなると扱いを慎重にしなくてはなりません。いちばん簡単そうな例をあげましょう。$\dfrac{1}{3}$ は $1:3$ で表される数ですが、小数では $0.333\cdots$ なる無限小数です。それは $1 \div 3$ を計算することで確認できます。それで私たちは

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots \tag{1}$$

なる認識を持つことになるわけです。ここで両辺を 3 倍すれば $1 = 0.999\cdots$ となることから、1 と $0.999\cdots$ はまったく等しいんだ、となかば強引に理解したりするのです。

このモヤモヤした感じは、おそらく無限であるとか極限というものを心底理解して、その扱い方に習熟するまで消えることがないと思います。ここでは、モヤモヤを払拭 (ふっしょく) するなど到底できないので、気持ちが安らぐ程度のヒントを書いておきましょう。

そもそも、(1) は等式としては奇妙です。左辺はどう見ても有限だし、右辺はどう見ても無限だからです。有限と無限はことばの上でまったく正反対のことを表していますから、(1) はまるで $5 = -5$ のような等式に似た状況にあるのではないでしょうか。元の式があやふやなら、両辺を 3 倍した結果が釈然としないのは当然でしょう。でも、このとらえ方で (1) が間違っていると主張するつもりはありません。順を追って説明しましょう。

極限

まず始めに、無限の彼方の感覚を持つことにしましょう。

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots$$

自然数の列です。さあ、皆さんはどこまで先を想像できるでしょうか。自然数列には終わりがありませんから、先の先はとてつもなく大きな数になっているはずです。どれほどの桁数を持つ数で

しょうか。おそらく無限に長い桁数を持つ数が限りなく連なっているのでしょう。と、こんな風に書いてみたものの、この程度の表現では "..." でごまかしている入り口すら表せてないと思います。正直に言って "..." は人間の想像を超えています。それもそのはずで、無限の状態はこの世に存在していないか、かりに存在していたとしても人類はまだ目にしていないからです。それでも何とか (1) のような工夫で、無限の理解に努めているのですね。

話がそれない内に別の無限列をひとつ。

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000}, \frac{1}{10000000}, \frac{1}{100000000}, \cdots \tag{2}$$

さあ、今度はどれだけ小さい値を想像できるでしょうか。この**数列**の先の先は、もう 0 といってかまわない値のはずですが、でも完全に 0 じゃない気がします。それでも無限の彼方では、もしかしたら 0 になっているかも知れないですね。しかし、これもまた同じように想像を超えた世界なのです。

これでは話が進みませんから、少し数式を用いて表現します。(2) は分母が 10 倍ずつ増えているので、n 番目に登場する数は $\dfrac{1}{10^n}$ と表現できます。私たちは n に**任意の**正整数を代入することで、実際に n 番目の値を計算することが可能です。いまは無限の彼方の状況を知りたいのですが、無限の彼方—これは非現実的なこと—に現実的行為である代入などできるはずがありません。そこで、私たちは $n = 569874123$ みたいに具体的数値を考えるのではなく $n \to \infty$ と書くことで対処することにします。すると (2) の無限の彼方の値は

$$\frac{1}{10^n} \quad (n \to \infty) \tag{3}$$

が表すものになります。

では、この値はいくつなのでしょう。$0.000\cdots1$ の "$\cdots$" が無限の 0 からなる数と思いたいのですが、最後に 1 があるのは変な気がします。それなら $0.000\cdots$ の "$\cdots$" の先に 1 が出そうで出ない数とでも考えましょうか。いいえ、1 は決して出てきません。"$\cdots$" には 0 しか含まれていないんです。すると、この値は 0 なんですか？　はい、そうです。

う〜ん。なんだかなあ、って感じですね。おそらく気持ちの上では、(3) はほとんど 0 なんだけど完璧に 0 と言い切るには何かが違うと感じるからでしょう。この感覚を尊重すれば (3) は

$$\frac{1}{10^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

と書くのがよいでしょう。でも、よ〜く考えてください。(3) は 0 以外に考えられないのですよ。そこで、あえて (3) は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

と、等号を用いて書ききってしまいましょう。ここで記号 $\lim_{n\to\infty}$ は、n を無限大にとったときの**極限値**を意味します。その値を等号で結ぶことに違和感がある—もしくは完璧に等しいことを認めたくない—なら、当面は「$n\to\infty$ で行き着く先を示す値」を意味しているととらえておいたらいかがでしょうか。

分子の有理化

$n\to\infty$ の状況を想像するのは楽しいものです。たとえば $\dfrac{n^2}{2n^2+3n}$ なる有理数は、最終的にどのような値に行き着くのでしょう。試しに $n=10,\ 100,\ 1000$ と順に代入してみると、$\dfrac{100}{230}\approx 0.4348$, $\dfrac{10000}{20300}\approx 0.4926$, $\dfrac{1000000}{2003000}\approx 0.4993$ となります。この様子から最終的に $0.4999\cdots$ となることが予想されますし、予想が正しければ**極限値**は $0.4999\cdots$ ということです。

こんなときは次のように、分数の分子・分母を同じ数—この場合は n^2 —でわって計算をすることが有効です。

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{n}} \\
&= \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
$$

ここでは $n\to\infty$ のとき $\dfrac{3}{n}\to 0$ であると見ています。あれれ。極限値は $0.4999\cdots$ と予想したけれど、計算では $\dfrac{1}{2}$ になってますね。$0.4999\cdots=\dfrac{1}{2}$ ですか。ちょっと不思議な感覚です。

$n\to\infty$ の状況を想像するのはなかなか難しいものです。唐突ですけれど $\sqrt{n^2+3n}-n$ を考えます。$n\to\infty$ おいて $\sqrt{n^2+3n}$ と n は、とてつもなく大きな値になり、かつ $\sqrt{n^2+3n}$ のほうが n より大きそうなので、その差も広がるように思えます。試しに $n=10,\ 100,\ 1000$ と順に代入してみると、$\sqrt{130}-10\approx 1.402$, $\sqrt{10300}-100\approx 1.489$, $\sqrt{1003000}-1000\approx 1.499$ となります。意外なことに、その差は 1.5 程度のようです。計算によって確かめてみましょう。

このような場合に有効なのが、**分子の有理化**です。なんと無理数の近似値を求めたときとは逆の有理化を行うのです。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n^2+3n}-n &= \frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n} \\
&= \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} \\
&= \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \\
&= \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}
$$

分子を有理化した後で、分子・分母を n でわっていますが、根号の中では n^2 のわり算になることに注意してください。これを見るとたしかに極限値が 1.5 であることが分かります。

*** *** **問　題** *** ***

1. 私たちは $0.000\cdots$ の先に 0 しか現れないことから、$0.000\cdots = 0$ の立場をとりました。$0.5 - 0.4999\cdots$ の計算をしてください。$0.5 = 0.4999\cdots$ と言えるでしょうか。

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ の極限値を求めてください。

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-n^2)$ を普通に考えると、結局 $\infty-\infty$ の状態を考えることになります（∞ は値ではなく状態と考えるのが自然ですから、∞ 状態は何乗しようとも ∞ 状態です）。$\infty-\infty$ は 0 でしょうか。n^3-n^2 を工夫することで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-n^2)=\infty$ であることを示してください。

** ** ** ** **

◆ $x \to$ (定数) の極限の場合 ◆

極限値を求めるのは、何も $n\to\infty$ に限ったことではありません。$x\to1$ のように、ある特定の数付近の様子を計算する場合があります。ただし、このときは分母が 0 になったりしないよう、細心の注意が必要です。

たとえば $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ を求める際、$x\to1$ であることは $x=1$ であることと大差ないと考え、そのまま $x=1$ を代入したのでは分母が 0 になって不都合が生じます。そこで計算上の工夫として、因数分解を利用しながら

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to1}(x+1) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

とすることがあります。しかし、本当は $(x-1)$ は $\displaystyle\lim_{x\to1}$ の影響をまともに受けるはずなので、約分する以前に $(x-1)=0$ となっていると考えるのが正しい解釈のはずです。なにしろ本文ではそう言い切ってますからね。

たしかにその通りで、$(x-1)=0$ ならば 0 で約分をしてはいけない規則に矛盾してしまいます。まったくこのような無限状態がからむと大混乱を招いてしまいかねません。そこで、おおまかに次のような解釈をすることがあります。

まず、$x \to 1$ の状態を ϵ なるごくごく微小な値を用いて $x = 1 + \epsilon$ と見ます。すると $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ の計算は

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} &= \left.\frac{x^2-1}{x-1}\right|_{x=1+\epsilon} \\
&= \frac{(1+\epsilon)^2-1}{(1+\epsilon)-1} \\
&= \frac{2\epsilon+\epsilon^2}{\epsilon} \\
&= 2+\epsilon
\end{aligned}
$$

となって、ϵ を 0 とみなせば極限値 2 を得るという寸法です。

しかし、これとて ϵ を 0 とみなすタイミングによっては、0 でわることになってしまうので注意が必要です。いずれにしても、極限に関する扱いは大変繊細なものであることは間違いありません。