数から極限へ –1–

有理数

皆さんは、日常の生活においても数学の勉強においてもさまざまな数を扱っていることでしょう。日常では長さや気温を表すために 1.75m や -0.1°C といった小数を使うことと思います。数学の勉強中には、値の正確さのため $\frac{5}{6}$ のような分数を使うこともあるでしょう。小数や分数は細かい値を表すには便利ですが、計算は面倒になるので、できればすっきりした数で済ませられたらと感じているかもしれません。

でも、いま示した 3 つの数はすっきりした数を用いて表すことができるのです。最近ではこんな書き方はまれですが、1.75, -0.1, $\frac{5}{6}$ はそれぞれ

$$7:4\ , \qquad (-1):10\ , \qquad 5:6$$

と書くことができます。これは、もちろん**比**で表現したものです。$7:4$ をことばで言うならば、「4 に対する 7 の量」とでもなるでしょう。読み方が逆じゃないかって？　いえいえ、読む順序が逆に思えるのは日本語で読んでいるせいです。英語表現では「*7 is to 4*（7 です、4 に対しては）」なので、何らおかしくありません。それで、4 に対して 7 の量であるということは、（4 を基準とすれば）基準より多い量であることを示しています。

さて、4 に対する 7 の量などと言うより、1.75 と言うほうが分かりやすいですね。本当にそうですか？　では、$4:7$ だったらどうでしょう。これは、基準 7 に対してきっちり 4 だけ与えられる量ですから、たとえば 7 枚のコインのうち 4 枚を指していることになります。しかし小数にした場合、$4:7$ は $0.5714285714\cdots$ です。半分より少し多いことは想像できますが、それが具体的にどういうものかは見えてきません。このようなときは、小数より比で表すほうが分かりやすいでしょう。

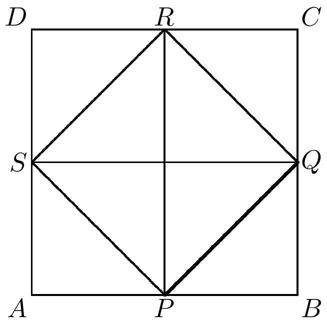
実際、日常生活の中では、小数を使うより比で表したほうが具体的です。にも関わらず、比の表現をあまり目にしないのは、単に習慣や慣れの問題だと思います。数学で分数が好んで使われるのは、正確さを重視することもそうですが、それ以上に 2 つの整数ですっきり分かりやすく表現できることも大きな要因なのです。このように整数の比で表すことのできる数を**有理数**（または比数）

と呼ぶことにします[1]。

無理数

数には有理数でないものがあることは知っていますね。$\sqrt{2}$ はその代表です。有理数でない、つまり分数で表すことができないから、新たに**根号**（$\sqrt{\ }$）を用いる必要に迫られたのです。

では、$\sqrt{2}$ はどのような長さでしょうか。



図で四角形 $ABCD$ は、一辺の長さが 2 の正方形であるとします。したがって、正方形 $ABCD$ の面積は 4 です。また、正方形の辺上の点 P, Q, R, S は各辺の中点です。このことから四角形 $PQRS$ も正方形で、正方形 $ABCD$ のちょうど半分の大きさであることが分かります。したがって、正方形 $PQRS$ の面積は 2 です。すると、正方形 $PQRS$ の一辺の長さは 2 乗して 2 になる数なので、$PQ = \sqrt{2}$ であることが分かります。

$PQ = \sqrt{2}$ であることは、直角三角形 PQB に**三平方の定理**を当てはめ、

$$PQ = \sqrt{PB^2 + QB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

としても計算できます。いずれにしても、ここで根号を用いて表した理由は、PQ の長さが簡単な整数比で表せないためです。有理数でない数は**無理数**と呼ばれています。

無理数は整数を用いた分数で表せないので根号を使っているのですが、有理数同様、小数で表すことはできます。日常の習慣に従えば、むしろそうしたほうが分かりやすいでしょう。$\sqrt{2}$ を小数で表すにはちょっとした根気が必要です。今では電卓の $\sqrt{\ }$ キーですぐに値を求めることができますが、本来は「2 乗してちょうど 2 になる」という条件から絞り込むものなのです。

2 乗して 2 になる数を見つけるために、$1.1^2, 1.2^2, 1.3^2, 1.4^2, 1.5^2, \ldots$ と順に計算をしてゆくと、値が 1.21, 1.44, 1.69, 1.96, 2.25, ... と増えてゆくのが分かります。$1.4^2 \to 1.5^2$ を計算したとき、値 2 をまたぎました。2 乗してちょうど 2 になる数が $\sqrt{2}$ ですから、$\sqrt{2}$ は 1.4 と 1.5 の間にあるは

[1] 有理数は英語で“ a rational number”。

ずです。そこで、精度をもうひと桁あげて $1.41^2, 1.42^2, \ldots$ と順に計算を進めると、$1.41^2 \to 1.42^2$ のところで値が $1.9881 \to 2.0164$ と 2 をまたぎます。これで $\sqrt{2}$ は 1.41 と 1.42 の間の数であることが分かりました。そこで、さらに精度をもうひと桁あげて同様に計算を繰り返せば

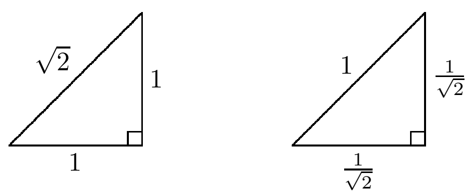
$$\sqrt{2} \approx 1.414 \cdots$$

であることが判明するのです。

この値は無限に数字が並んでいますが、$\dfrac{4}{7} = 0.5714285714 \cdots$ で数字が無限に並ぶのとは次元が違っています。それは、$\dfrac{4}{7}$ は "571428" の並びが繰り返すだけなのに対し、$\sqrt{2}$ では精度をあげて計算をするまで次の数字が分からないことにあります。

分母の有理化

このように無理数は扱いづらい数です。とくに無理数をわり算に利用するときが問題となります。



左の三角形は、底辺と高さが 1 の直角三角形を想定しています。このとき、斜辺の長さは $\sqrt{2}$ ですが、およその値で扱いたいときには $\sqrt{2} = 1.41421356 \cdots$ を適当なところで切って使えばよいだけです。一方、右の三角形は、斜辺が 1 である直角三角形を想定しています。このときは、底辺と高さは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ になります。これを、およその値で扱おうと思ったら、まず $\sqrt{2}$ をどこで切るかが問題となります。もし、$\sqrt{2} \approx 1.4$ とすれば $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7143$、$\sqrt{2} \approx 1.41$ とすれば $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7092$、$\sqrt{2} \approx 1.414$ とすれば $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7072$、$\ldots$ という具合に、なかなか確信の持てる値に到達できそうにありません。

原因は分母に無理数があるためです。これを回避するには、分数を通分する要領で、分子・分母に $\sqrt{2}$ をかけるのがうまい方法です。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

こうしておけば、$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1.41421356 \cdots}{2}$ の計算は望みのところで打ち切れ、それでいて正確な値を手にすることができるのです。これは**分母の有理化**と呼ばれる計算手法です。

有理化の工夫

数学においては、正確な値が使えれば、分母が有理数であろうと無理数であろうとあまり関係ありません。しかし、実際に日常生活にそれを活かそうと思えば、現実的な数値に直さなくてはなりません。その場合、分母が無理数であることは計算精度の上で不利ですから、いま見てきたような分母の有理化をするのです。

分母が無理数になる場合は他にもあります。たとえば $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ の近似値が必要になったらどうしたらよいでしょう。単純に分子・分母に $\sqrt{2}$ をかけるだけではうまくいきません。このようなときは、$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ になることを利用します。根号がついた数は 2 乗すれば必ず有理数にできるからです。そこで

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

という計算が成り立ちます。$\sqrt{2}-1$ であればすぐさま $0.41421356\cdots$ と分かります。もちろん $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ も同じ値になるわけですが、$\sqrt{2}$ を粗い近似値で計算してしまうと、よい結果が得られません。ぜひ試してもらいたいものです。

*** *** **問　題** *** ***

1. $1:2$ が $\dfrac{1}{2}$ であることは説明しましたが、比には連比と呼ばれる書き方があります。たとえば $1:2:3$ がそうです。ただし、この書き方は使い勝手がよくありません。それは、$(1:2):3$ と見る場合と $1:(2:3)$ と見る場合で違う値となるからです。それぞれの値がどうなるか確認してください。

2. $0.272727\cdots$ は以下 "27" が延々と続く数ですが、これを 100 倍すると $27.272727\cdots$ となります。すると、2 数の差をとれば小数点以下の無限部分を消去できます。このことを利用して $0.272727\cdots$ を分数表記に直してください。

3. $\sqrt{10}$ は 2 乗すると 10 になる数です。およその値を求めてください。

4. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ のおよその値を求めてください。その際、$\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$ を利用するとよいでしょう。（本当は $\sqrt{6}$ の値を示すべきなのですが、これは $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ を使ってもらいましょう。）

** ** ** ** **

◆ 開平のアルゴリズム ◆

本文中では、$\sqrt{2}$ の近似値を求めるのに、桁の精度をあげながら絞り込んでいきました。しかし、開平が目的ならば簡単なアルゴリズムがあります。まず、その様子を示すことにします。

$$
\begin{array}{l|l}
 & 1.\ \ 4\ \ 1\ \ 4\ \ 2\ \cdots \\
\hline
\underline{1} & \sqrt{2.} \\
\underline{1}^{(a)} & 1 \\
\hline
2\ \underline{4} & 1\ 0\ 0^{(b)} \\
\ \ \underline{4}^{(c)} & \ \ 9\ 6 \\
\hline
2\ 8\ \underline{1} & \ \ 4\ 0\ 0^{(d)} \\
\ \ \ \ \underline{1}^{(e)} & \ \ 2\ 8\ 1 \\
\hline
2\ 8\ 2\ \underline{4} & \ \ 1\ 1\ 9\ 0\ 0^{(f)} \\
\ \ \ \ \ \ \underline{4} & \ \ 1\ 1\ 2\ 9\ 6 \\
\hline
2\ 8\ 2\ 8\ \underline{2} & \ \ \ \ 6\ 0\ 4\ 0\ 0 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{2} & \ \ \ \ 5\ 6\ 5\ 6\ 4 \\
\hline
2\ 8\ 2\ 8\ 4\ \square & \ \ \ \ \ \ 3\ 8\ 3\ 6\ 0\ 0 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \square & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \cdots
\end{array}
$$

見ると、どことなく普通のわり算に似た計算をしているようです。実際、開平の計算でもわり算と同様の計算をするところがあります。しかし、見てのとおり、左側ではわり算とは違う計算もしているようです。また、商をたてる位置も 2 桁ごとの場所になっていたり、余りに付け加える数—すなわち上から下ろす数—も 2 桁づつまとめて下ろしているのに気付くでしょう。それは、開平計算では「小数点を基準として 2 桁ずつを単位」としているからです。

計算は 2 桁区切りの最上位から始めます。この例ではそれは 2. です。開平の計算で最初にすることは、2 桁区切りの最上位—いまは 2—を超えない最大の平方数を探すことです。それには 1×1 が該当します。そこで、この数を左側に縦に並べて書きます ($^{(a)}$)。同時に 1×1 の答を 2 の下に書いてひき算をしますが、この流れは普通のわり算の流れと同じです。また、普通のわり算同様、上から数を下ろすのですが、2 桁まとめて下ろすことに注意してください ($^{(b)}$)。

次に、ここにある余り—いまは 100—を超えない最大積を探すのですが、それを求めるために先ほど左側に縦に並べて書いた数を使います。まず、縦に並べた数の和—つまり $\underline{1}+\underline{1}=2$ —を求めておきます。そして、(その和の右にひと桁付け加えてできる数) $\times$ (付け加える数) の値が、さっき下ろした余りを超えず、かつ最大になるように付け加える数を決めます。とても分かりにくい表現ですね。具体的には $2\square\times\square\leq 100$ を満たす最大の□を探すのです[2]。それには 4 が当てはま

[2]記号 $\leq$ は、日本では $\leqq$ で表される不等号です。

るので、24, 4 を縦に並べて書きます（$^{(c)}$）。同時に 24×4 の結果を 100 の下に書いてひき算をして、上から 2 桁分の数を下ろすのは同じです（$^{(d)}$）。

あとはこの繰り返しとなります。すなわち、次に探すべき数は $28\square \times \square \leq 400$ を満たす最大の□です。それには 1 が当てはまるので、281, 1 を縦に並べて書きます（$^{(e)}$）。同時に 281×1 の結果を 400 の下に書いてひき算をして、以下繰り返しとなるわけです（$^{(f)}$）。

さて、肝心の答はどこに出ているのでしょうか。それは、順に探した□の値—下線の数字—です。□の値を見つけるたびに商を書いていけば、開平の計算がどこまでもできます。この方法の欠点は、次第にかけ算をする数が大きくなっていくことでしょう。まあ、8 桁程度までなら電卓を利用できるので、有効数字 8 桁程度の精度は軽く得られます。え？　電卓を利用するなら最初から $\sqrt{}$ キーを使うって？　ごもっとも。