小さな指数が主役の世界 –2–

指数関数の逆読み

さて、私たちは

$$2^p = 1.5^q$$

を求めるのに四苦八苦しつつも、なんとかそれを満たす p, q を特定できるようになりました。でも、よく考えるとこの式は本質的に

$$2^x = 1.5$$

の解を求めていることと同じなのです。

そのことを示すには、指数に関する知識が必要になります。と言っても、2 乗して a になる数を $\sqrt{a}$ と書く延長で、3 乗して a になる数を $\sqrt[3]{a}$ と書くことを知っていれば十分です—実は、$\sqrt{a}$ は $\sqrt[2]{a}$ の省略形です。このことから、q 乗して a になる数は $\sqrt[q]{a}$ と書けます[1]。

いま、$a = b$ なる数があったとします。そうであれば、自然な考えで $\sqrt[q]{a} = \sqrt[q]{b}$ であることも理解できると思います。これは、機械的に $\sqrt[q]{\ }$ をかぶせているように見えますね。そこで私たちは、$2^p = 1.5^q$ に機械的にこの規則を当てはめて

$$\sqrt[q]{2^p} = \sqrt[q]{1.5^q}$$

と書くことにしましょう。

$\sqrt[q]{a}$ は q 乗して a になる数であったことに注意してください。この対応から $\sqrt[q]{1.5^q}$ は q 乗して 1.5^q になる数ということになります。q 乗して 1.5^q になるのは、当たり前ですけれど 1.5 ですね。したがって、$\sqrt[q]{1.5^q} = 1.5$ です。

結局、$2^p = 1.5^q$ を満たす p、q を知ることと

$$\sqrt[q]{2^p} = 1.5$$

を満たす p、q を知ることは同じことであるといえます。

ところで、$\sqrt[q]{2^p}$ は q 乗して 2^p になる数ですから、2 倍目盛に比べて $\dfrac{p}{q}$ 倍の目盛を持っています。先ほど見たように、目盛が n 倍になれば目盛の値が 2^n になるわけですから、目盛が $\dfrac{p}{q}$ 倍な

[1]「q 乗根 a」と読みます。

ら目盛の値が $2^{\frac{p}{q}}$ になると考えてよいでしょう。このことから、$\dfrac{p}{q}=x$ とおくことで

$$2^x=1.5$$

の関係と同じと考えることができるのです。

以前、$2^7\approx 2^{12}$ を求めていますから、$2^p=1.5^q$ の対比から $\dfrac{p}{q}=x\approx 0.58$ であると結論できます。

指数の拡張

さあ、いま私たちの目の前には

$$2^x=1.5 \qquad \Rightarrow \quad x\approx 0.58$$

である関係が現れました。つまり $2^{0.58}\approx 1.5$ であるわけです。でも、0.58 乗ってどういうこと？

結果だけ見れば、式はおかしなことを主張しているように見えます。でも、一歩前に戻ってみましょう。一歩前とは、$2^p=1.5^q$ のことです。この場合、$p=7$、$q=12$ で等式がほぼ成立したので、ここで止めておいたなら何らおかしなことはなかったのです。それでも、あえて $2^{0.58}$ などというおかしな形にしたのには理由があります。

理由を説明する前に、別の例を取り上げておきます。$8^p=4^q$ を満たす p, q を探してみましょう。これはすぐ $p=2$、$q=3$ であることが分かります。そして、ここから

$$8^{\frac{2}{3}}=8^{0.666\cdots}=4$$

という記述ができることは述べたとおりです。このような考えは**指数の拡張**と呼ばれます。本来、指数—a^x における x—は同じ数を繰り返しかけることを記述するために導入されました。その意味では $8^2=4^3$ までの記述は自然なものですから、あえて $8^{\frac{2}{3}}=4$ と書く必要はありません。指数が本来の意味で使えるからです。

しかし、$2^p=1.5^q$ では話が違ってきます。これは、$p=7$、$q=12$ で等式がほぼ成立するものの、まったく等しいわけではありません。本当に等しくなるような p, q の組を求めたければ、もっと大きな値の組を試さなくてはなりません。ところが残念なことに、整数値による組では $2^p=1.5^q$ を成立させられないのです。それは、$1.5=\dfrac{3}{2}$ なので

$$2^p=\left(\frac{3}{2}\right)^q=\frac{3^q}{2^q}$$

と書き直せば分かることです。3 と 2 は共通の約数を持ちませんから、3^q と 2^q にも共通の約数はありません。つまり、$\dfrac{3^q}{2^q}$ が整数になることもないので、明らかに 2^p にはなり得ません。

わざわざ、$2^p = 1.5^q$ を満たす値を知るのに $2^x = 1.5$ を考えたのは、実数値でなければ正確な値を求められなかったからなのです。

対数

さて、いよいよ指数の考えも大きな広がりを見せてきました。それは、整数値でない x を用いて 2^x という表現を使えるようになったからです。とくに証明などしませんが、指数に実数値を用いて 2^x を計算できることはすごいことです。なぜなら、任意の x から $y = 2^x$ を満たす y を求められれば、指数と累乗した値とを関数として見直すことができるからです。関数は、その性質を押さえることで有効な解析の道具となります。

指数関数 $y = 2^x$ を少し考えておきます。$0 < a < b$ であるような $x = a$ と $x = b$ において、2^a と 2^b の値を比較すれば $2^a < 2^b$ となります。このことは、x の値が増加すれば y の値も単純に増加することを意味します。そこで、ちょっと別の見方を取り入れてみましょう。

x が徐々に大きな値をとりながら増えている様子を想像してください。すると、y の値も以前の値より大きくなりながら徐々に増えるはずです。そして、ここが肝心なところで、x が増えている限り y は決して以前と同じ値をとることはありません。すなわち、y の値を得る x は必ずひとつだけということです。つまり、x と y は**一対一対応**です。

こう言うと何か大げさに聞こえますが、一対一対応であることは重要なことです。$y = x^2$ の関係は一対一対応ではありません。それは、$y = 4$ の値を得る x は、$x = 2$ と $x = -2$ の 2 つがあるからです。こうなるといろいろと面倒なもので、$y = a$ の値を得る x を考えるときは、常にそれが正か負か気にしなくてはならないのです。

ですが、$y = 2^x$ においてはその面倒がありません。$y = a$ の値を得る x を考えるときは、ただひとつの値を考えれば済むからです。では、$y = a$ の値を得る x、すなわち $2^x = a$ を満たす x はいくつでしょうか。

たとえば、$2^x = 8$ ならば $x = 3$ です。また、$2^x = 256$ ならば $x = 8$ です。このぐらいであれば簡単に分かるのですが、$2^x = 3$ となると話は別です。これは、$x^2 = 25$ を満たすのは $x = \pm 5$ であるけれど、$x = 3$ を満たすのは $x^2 = \pm\sqrt{3}$ とするように、新たな記号を導入しないことには解決しないものだからです。そこで、$2^x = 3$ を満たす x は新たな記号を用いて

$$x = \log_2 3$$

と表すことにします[2]。これは、とても取っ付きにくい表現ですね。とりあえずここでは、

$$x \text{ は } 2 \text{ を } 3 \text{ にする指数の値}$$

[2]「$x =$ ログ 2 3」と読みます。

と読んでおくとよいでしょう。この指数を求めるための値を**対数**と呼びます。

$\sqrt{a}$ は「2 乗して a になる数」と読むことがあるので、$\sqrt{25}$ は「2 乗して 25 になる数」すなわち 5 ですね。この連想で簡単な対数の値を考えることにしましょう。まず、$\log_2 32$ と書けば、「2 を 32 にする指数の値」と読んで $\log_2 32 = 5$ が分かります。なぜなら、$2^5 = 32$ ですから。

それでは次の例を。

$$x = \log_2 1.5$$

の値はいくつでしょうか。ことばで表現するなら、これは「2 を 1.5 にする指数の値」です。すなわち $2^x = 1.5$ を満たす x ということです。以前、近似値を求めたことを思い出してください。そのときはたしか $x \approx \dfrac{7}{12}$ を求めたはずです。したがって

$$x = \log_2 1.5 \approx \frac{7}{12} = 0.58333\cdots$$

なのです（正確には $\log_2 1.5 = 0.5849625\cdots$ です）。

指数関数の逆関数として

ここまでの話を注意深く読み返しましょう。すると

$$a^x = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_a b$$

なる関係が成立しています。対数の定義だから当然だよ、と言ってしまっては身もふたもないですね。私たちは別の部分へ視線を移すことにします。それは文字 x の大きさです。あまり数学的な視点ではないかもしれませんが、左辺の x は指数であるために小さく記述されています。それに対して、右辺の x は大きく記述されているばかりか、$x = \cdots$ と等式の主要な値になっているのです。まるで、脇役のように小さく記述されていた指数が、対数の世界ではいきなり主役に躍り出たような印象を受けます。まさに、対数には脇役を主役に抜擢する力があるのです。

対数について話を始めると、とても大きな世界に入ることになってしまうので、ここでは扱いません。ですが、いままで見てきたように、対数は指数の逆関数であることは重要な性質です。それは、対数の考えを導入すれば、$a^x = b$ を満たす x を $x = \log_a b$ として特定することができるからです。$x = \log_a b$ といってもピンとこないでしょうが、ことばで言えば

x は、a を b にする指数の値

なのです。

うまくすれば、その指数は単純に $a^p = b$ として見つかるかもしれません。また、逆に $\sqrt[q]{a} = b$ として見つかるかもしれません。たとえ、こんなにうまくいかなくても、$\sqrt[q]{a^p} \approx b$ である p, q の組を見つけられるでしょう。これだけでも、対数を導入することは大変意義あることなのです。

一般に、比例関係でも指数関係でも、とにかく何らかの関係において、$x = a$ のときの y の値を計算することがあれば、逆に $y = b$ のときの x の値を知りたくなくことは十分あり得ることです。もし、その手だてがなければ、関数は一方通行ということになり、関数の価値は半減してしまうでしょう。逆関数が分かる関数、すなわち双方向で値を特定できる関数であれば、その用途は相当大きく広がるからです。その意味において、指数関数の逆関数である対数関数を定義できたことは、すばらしいことなのです。

*** *** **問　題** *** ***

1. $2^{10} = 1024$、$10^3 = 1000$ ですから、$2^{10} \approx 10^3$ といえます（誤差 2%強）。 このことから、$\log_{10} 2$ のおよその値を求めてください。

2. $a^{\log_a b}$ の値は何でしょうか。

3. $a^p \times a^q = a^{p+q}$ であることから、$\log_a X + \log_a Y = \log_a XY$ が成り立つことを説明してください。

** ** ** ** **

◆ 常用対数 ◆

対数関係は指数関係と逆の関係にあるということで、記号 log を導入しました。このことを式で表すと

$$a^x = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_a b$$

の関係になることも述べました。具体的に $a = 2, b = 8$ であるなら、$x = 3$ ですから

$$2^3 = 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 = \log_2 8 \qquad (☆)$$

となるでしょう。また、$a = 10, b = 100$ であるなら、$x = 2$ ですから

$$10^2 = 100 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 = \log_{10} 100 \qquad (★)$$

となるでしょう。いずれにせよ、対数関係にすることで指数を主役に据えていることが分かります。対数関係においては、底は脇役に過ぎません。

(☆) では 2 が脇役を務め、(★) では 10 が脇役を務めています。しかし、脇役だからといって軽々しい仕事をしているわけではないのです。むしろ、脇役 a が土台となって、土台にいくつの主

役 x を乗せれば目的の数 b になるかが問われているのです。その意味において土台となる底は大変重要です。

私たちは、脇役に好きな数を当てることができます。2 を当てれば $y=2^x$ という指数関数を、10 を当てれば $y=10^x$ という指数関数を考えることになるからです。それは、同時に $x=\log_2 y$ という対数関数と $x=\log_{10} y$ という対数関数を考えることになります。指数関数も対数関数も脇役である底の値によって、様々な顔を見せることになるのです。

私たちにとって相性の良い脇役はどれでしょうか。日常的には、おそらく 10 でしょう。なぜなら、私たちは普段から 10 進表記を用いているからです。10 進表記とは、10 倍ごとに桁数が上がっていく表記方法です。指数は、基本的に底を何倍するかを示す数なので、数値の切り替わりが桁数の変わり目になると都合よいと思われます。

たとえば底が 2 のとき、指数が 2 から 3 へ増加しても、桁数の変化はありません（$2^2=4$、$2^3=8$ でいずれも 1 桁です）。しかし、底が 10 のときは、指数が 2 から 3 へ増加すれば、桁数も 1 増加します（$10^2=100$、$10^3=1000$ で桁数が変わりました）。

この性質のために、底が 10 である指数関数および対数関数を利用する機会が多いのです。とくに、底が 10 である対数関数を**常用対数**と呼び、対数関数の筆頭としているのです。