小さな指数が主役の世界 –1–

倍々ゲーム

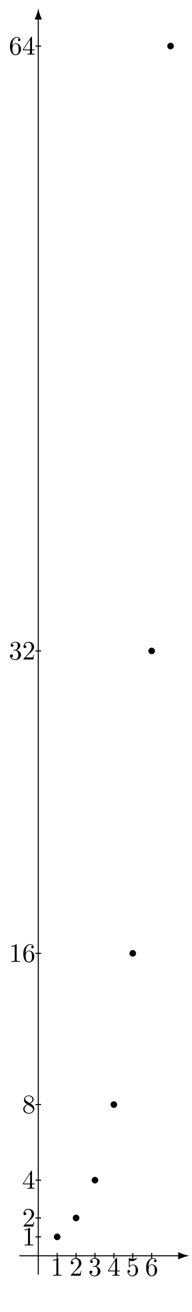
『それほどまでにおっしゃるならば、今日は米を一粒いただきとうございます』

殿様から執拗に褒美を受け取るよう請われた聡明な男がこんなふうに答えたという話は、国内外を問わず、多少の形を変えてよく知られているようです。

『今日いただくのは一粒ですが、明日は倍の 2 粒、あさってはさらに倍の 4 粒、その次の日は 8 粒、というように毎日倍々の米粒をいただきたいのです。毎日受け取りにくるのは大変ですから、ひと月後にまとめて持ち帰ることにします』

ほとほと欲のない申し出にあきれたのか、軽々しく承諾した殿様が一ヶ月後に後悔したのは言うまでもありません。一ヶ月後—30 日後としましょう—の米粒の総量は 2^{30} —正確には $2^{30}-1$ —にもなるからです。2^{30} 粒は計算すると 1,073,741,824 粒になります。そうは言うものの、これがどれほどの量なのか想像もつきません。

倍々で増える速度がどれほどのものかは右のグラフで実感してください。7 日目の点を打つには、この倍の高さのグラフが必要です。8 日目はさらに倍の高さが必要ですから、これではいくらグラフを用意しても足りませんね。



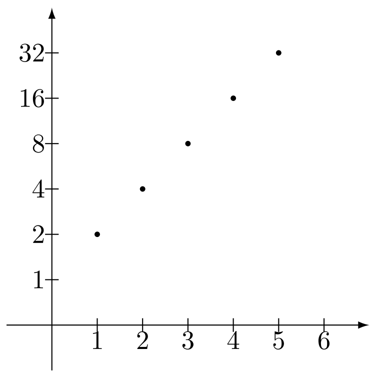
事象の変化をグラフにすることは視覚的に意味のあることです。いまのように関係式が分かっている場合はグラフの重要性は薄れるかもしれませんが、そうでなければグラフ化することは大きな意味を持ちます。先の予測をしやすいからです。しかし、このようにグラフの変化が急激すぎると先の予測なんて考えられないものです。そこで、変化が急激な場合でもグラフが描けるような工夫をすることにしましょう。

片対数グラフ

米粒が倍々になる関係は $y = 2^x$ で表せます。ここで、x は日数、y は x 日目におけるそのときの米粒の量です。ただし、簡単のため 1 日目に 2 粒の米から始めることにします（$x = 1$ を代入すると $y = 2$ ですから）。こう考えても米粒の量が 1 日違いになるだけで、倍々で増える本質は変わりません。よく、「指数関数的に増加する」という表現を聞きますが、このように定量倍で増加（または減少）する関数を**指数関数**と呼びます。また、定量倍の定数—いまの例では 2 —は指数関数の**底**（てい）と呼ばれ、重要な役割を与えられていますが、今回の話の中では脇役を務めることになるでしょう。

では、グラフを用意しましょう。ふつうグラフには等間隔の目盛が振ってあるので、目盛に 1, 2, 3, 4, 5, ... をあてがいたいですね。しかし、これでは破綻してしまうのは見てきたとおりです。x 軸の日数目盛には問題がないので、y 軸の米粒の目盛を考え直します。そこで、y 軸の目盛には 1, 2, 4, 8, 16, ... をあてがうことにします。これでも等間隔であることに注意してください。各目盛間は "常に 2 倍の等間隔" だからです。

それでは、新たな規格でグラフを描き直してみます。



こうすると、$y = 2^x$ の関係は比例関係であることが分かります。ここで用いたグラフは、一方が等間隔の増加 "量" で、もう一方が等間隔の増加 "率" です。このように、片方の目盛を倍率で表すグラフは**片対数グラフ**と呼ばれます。

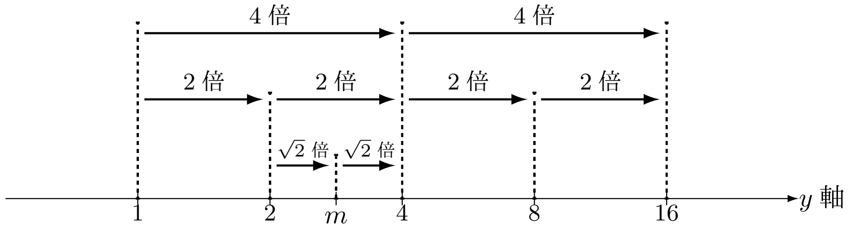
対数グラフの仕組み

米粒の例では 1 日単位で米粒の量が変化していましたから、64 粒の次は 128 粒になるしかなく、100 粒になる日を考えることはできません。しかし、これが日々刻々繁殖する藻であったら話は違ってきます。

具体的に、1 日経つと倍の広さに繁殖する藻があり、初め 2cm^2 の面積を占めていたとします。このとき、初日から x 日経ったときの藻が占める面積を $y$cm^2 とすれば $y = 2^x$ の関係になります。この場合、初日に 2cm^2 であった藻は、2 日目には 4cm^2、3 日目には 8cm^2 になります。

しかし、藻は休むことなく一定の割合で増えているはずですから、どこかで 3cm^2 になっていたはずです。どこかと言っても、それは 2 日と何時間か経過した時点であることは間違いありません。そのことを知るにも、y 軸の 2 と 4 の間に 3 の目盛があったほうがよいでしょう。では、目盛 3 は 2 と 4 の中間でしょうか。

いいえ、そうではありません。対数グラフでは、等間隔の目盛は等倍率であるからです。y 軸を横にした図で説明しましょう。



等間隔の目盛が等倍率であるとはこういうことです。1→4 と 4→16 は共に 2 目盛を要していて、その倍率は 4 です。また、1→2、2→4、4→8、8→16 はどれも 1 目盛を要していて、倍率はすべて 2 です。同様に、2 と 3 の中間点を m とすると、2→ m と m →4 は共に半目盛を要し、それが等しい倍率になるはずです。1 目盛で 2 倍の倍率ですから、半目盛では $\sqrt{2}$ 倍の倍率になります。したがって、中間点 m の値は $2\sqrt{2} \approx 2.828$ であって 3 ではないのです。

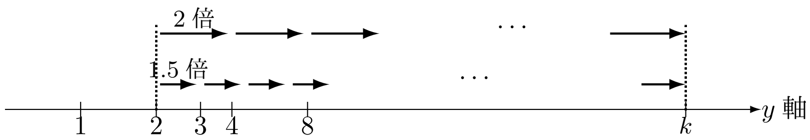
では、目盛 3 はどこにあるのでしょうか。

整数値の目盛を探そう

対数グラフの目盛は、軸を等間隔に区切ったのでは使い勝手がよくありません。それは、いま見たように等間隔の目盛が、きりのよい整数値にならないからです。このことは、グラフの逆読みをしづらくします。グラフの逆読みとは、$x =$ (何々) から y の値を読み取ることの逆で、$y =$ (何々) から x の値を読み取ることを言います。私たちは、きりのよい目盛を基準にグラフの値を読むことに慣れていますから、逆読みのためにも y 軸の目盛はきり良く整数値を振りたいものです。そうすれば、藻の例でみるように、3cm^2 になったのがいつ頃だったのかが読み取りやすいでしょう。

目盛 3 の位置を探すことにします。これまでの話から、目盛 2 と目盛 4 の中間点は $2\sqrt{2}$ ということが分かっていますから、目盛 3 はそれより少し右にあるはずです。ところで、いま私たちが考

えている対数軸は、2→3 の変化を 1 増加したとは考えていませんね。対数軸は "倍率目盛" ですから、2→3 の変化は 1.5 倍の増加と見なくてはなりません。問題は、1.5 倍の増加が 2 と 3 の間のどの程度の位置にあるかです。ところが、それを求めるのは簡単ではありません。多少の工夫をしながら計算することにします。



それには、等間隔の目盛は等倍率であることを利用します。もし、2 倍目盛と 1.5 倍目盛を繰り返し並べた結果、y 軸の先のある点 k で一致したなら、その比が 2 倍目盛と 1.5 倍目盛の比であるはずです。具体的に、2 倍目盛を p 回繰り返し、1.5 倍目盛を q 回繰り返して一致したとすれば、1.5 倍目盛は 2 倍目盛の $\dfrac{p}{q}$ 倍となります。2 倍目盛は 1 の間隔で振ってあるので、これから 1.5 倍目盛、すなわち 3 の場所を特定できるのです。

しかし、実際は 2 系統の目盛がある点 k で一致することはありません。それは、いま私たちが知りたい値が**有理数** ではないからです。でも、グラフ用紙に整数の目盛を振る程度なら、近似値でも十分役目を果たします。ここでは、電卓で計算できる程度の精度で求めることにします。

さて、私たちが知りたいのは

$$2^p \approx 1.5^q$$

を満たす p, q です。電卓をちょっとたたいてみると、$p = 7$、$q = 12$ のところで

$$2^7\ (= 128) \approx 1.5^{12}\ (= 129.74633)$$

を得ることができます。誤差は 1% 強にすぎないので、なかなかよい近似だと思います。よって、$\dfrac{7}{12} = 0.5833333$ が分かりました。つまり対数目盛の 3 は、目盛 2 から 0.58 程度右の位置となるわけです。

*** *** 問　題 *** ***

1. 殿様が一ヶ月後に与えなければならない米は、米俵にして何俵になるでしょうか。実際に米粒の重さを計量して、計算してみてください。ただし、米俵 1 俵は 60kg であるとします。

2. x の一定和の変化に対して y が一定積で変化する場合は、片対数グラフを用いると便利です。自然界の法則には、そのような例は多く存在します。どんなものがあるか探してください。

3. 対数目盛 y 軸において、目盛 5、目盛 6、目盛 7 の位置を求めてください。

**　**　**　**　**

◆ 2^n の総和 ◆

初日に 1 粒、2 日目は 2 粒、3 日目は 4 粒、4 日目は 8 粒、. . . と、日々倍々に増える米粒を、30 日後に合計すると 2^{30} になると言いました。増え方が 2 倍で、30 日後の総量だから単純に 2^{30} としたのではありません。ここでは、その計算方法を考えましょう。

まず、初日に 1 粒、2 日目は 2 粒、3 日目は 4 粒、4 日目は 8 粒、. . . を 30 日間合計すると

$$1+2+4+8+16+\cdots+2^{29}$$

であることを確認しておきます。最後が 2^{29} であることに注意してください。初日が 1 から始まっているので、30 日後は、かけられている 2 は 29 個のはずです。

ところで、この計算はあまりに具体的な数値のため、計算の仕組みを考える上では少々不向きです。そこで、一般的に n 日目までの合計を計算することを考え、その総計を S で表すことにします。すると

$$S=1+2+4+8+16+\cdots+2^{n-1} \qquad (☆)$$

となります。最後が 2^{n-1} であることは、30 日の例が示す通りです。

ここで、$2S$ を考えます。それは S の 2 倍ですから

$$2S=2+4+8+16+32+\cdots+2^{n} \qquad (★)$$

ですね。そして、(★) − (☆) として辺々引き算をすると、真ん中のほとんどの項が消去されて

$$S=2^n-1$$

となることが示されます。よって、30 日後の米の総量は $2^{30}-1$、すなわち、ざっと 2^{30} であると言えるのです。

さて、ここまでを注意深く見ていれば、倍率が 2 倍でなく、一般に a 倍のときは $S=a^n-1$ であることが分かるでしょう。ですから、結果的に増え方が a 倍で、n 日後の総量を計算するなら、ざっと a^n と考えても問題ないことが分かります。ただし、「n が十分大きいとき」という条件がつきますが。

余談になりますが、数学では「x が十分大きい（または小さい）」条件の下で成り立つ近似式がよく利用されます。"十分" という言葉がいまひとつ数学的厳密さを欠くように思えます。けれど、むしろこれが数学的な表現だと思います。この感覚が身に付くには、十分な学習が必要なことは言うまでもないですね。