関数の足跡 –2–

数列は過去も未来もお見通し

数列 $a_n = 4n$ を考えます。一般項の式が分かっていれば、n にいろいろな値を当てはめることで、任意の項の値を求めることができます。では、関数式に文字を代入するように、数列の一般項にも文字を代入するとどうなるでしょうか。もし、$n = k$ を代入すれば $a_k = 4k$ となりますが、これは、数列 a_k の第 k 項が $4k$ で計算されると言っているだけで、まったく何も変わることはありません。

そこで、ちょっとややこしいのですが、n に $n-1$ を代入するのはどうでしょう。代入と言っても、要するに n を $n-1$ に書き換えるだけですから、$a_{n-1} = 4(n-1)$ となるだけです。こうなると話が進展します。いま求めた一般項の式は、数列 a_{n-1} の第 $n-1$ 項が $4(n-1)$ で計算されると言っていることになるからです。このことは、私たちが第 n 項の一歩前の値を計算する式を手に入れたことを意味します。逆に、n に $n+1$ を代入して $a_{n+1} = 4(n+1)$ とすれば、第 n 項の一歩先の値を計算する式になるわけです。

なにも一歩前の値を知るのに、そんなややこしいことをしなくとも、と思うかもしれませんね。でも、これは数列の様子を知るには重要な考えなのです。まだ、この段階では簡単すぎる例でしか説明できないのは残念ですが、具体的にはこういうことです。

$a_n = 4n$ に対して $a_{n-1} = 4(n-1)$ を考えたとき、この 2 つの式から、連続する 2 項の一般的な式が分かったことになります。一般的というのは、どの連続する 2 項を考えても、ということです。ですから、これらの差、すなわち

$$a_n - a_{n-1} = 4n - 4(n-1) = 4$$

が意味することは、数列 a_n においては、どの連続する 2 項の差をとっても必ず 4 になることが分かります。ここでは、もともとの数列

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ \ldots$$

から一目瞭然の結果なので、何の面白味もないと思わないでください。こんなことをする効果をすぐにでもお目にかけましょう。

漸化式と等差数列

隣り合う 2 項 a_n と a_{n-1} との差が一定の値である数列があったとします。その差を d とします[1]。先の例に倣（なら）えば、その関係を

$$a_n - a_{n-1} = d$$

と書くことができます。このように、数列のいくつかの項どうしの関係を示す式を**漸化式（ぜんかしき）**と呼びます。

さて、第 n 項が a_n である数列なら、その一歩手前が a_{n-1} で、二歩手前が a_{n-2} であることは述べた通りです。隣り合う 2 項の差は一定でしたから

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= d \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= d \\
a_{n-2} - a_{n-3} &= d \\
&\vdots
\end{aligned}$$

のように、いくつもの関係が作られます。この先、式はどう変化するのでしょうか。

添字 n からは際限なく大きな α を引けるわけはありません。添字は数列が始まる時点では 1 ですから、n がどうであれ $n-\alpha$ は 1 になった時点で終了です。したがって、漸化式の羅列は $a_2 - a_1 = d$ となった時点で出尽くすことになります。よって

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= d \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= d \\
a_{n-2} - a_{n-3} &= d \\
&\vdots \\
a_3 - a_2 &= d \\
a_2 - a_1 &= d
\end{aligned}$$

が漸化式から得られるすべての式なのです。

式を上から下へながめてみましょう。注意深く見ると、左辺に符号違いの項が順次現れています。すると、上から下までまとめて足してしまえば、符号違いの項はすべて消去されてしまいます。そとのき左辺に残るのは何でしょう。それが、$a_n - a_1$ であることは容易に気づくはずです。では、右辺はどうなっていますか？

[1] $d$ifference—差。

右辺は d だけですから、要は d がいくつあるか分かればよろしい。d は n 個ですか？　いいえ、$(n-1)$ 個ですよ。もう一度、左辺をながめてください。引かれるほうの項は a_n で始まり a_2 で終わっています。また、引いている項は一番下が a_1 で一番上が a_{n-1} です。いずれも $(n-1)$ 項しかないことを示唆しています。

結局、漸化式を足した結果は $a_n - a_1 = (n-1)d$ ですが

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

と書くのが一般的です。この数列は**等差数列**と呼ばれます。a の添字 n に対して d にかける数が 1 違いの $(n-1)$ であることに注意しましょう。

漸化式と等比数列

もうひとつの例を、今度は具体例を交えて挙げましょう。a_n と a_{n-1} との比が一定の値である数列を考えます。具体的な数値を与えて、この数列には

$$a_n = 1.05a_{n-1}$$

の関係があるものとしましょう。つまり、この数列 a_n においては、どの連続する 2 項を比較しても、ある項は直前の項の 1.05 倍ということです。これは日常において、実際目にできる性質の関係です。借金の利子や預金の利息が、年に 5% つく場合に現れる式がこれです。数列を考える上で間隔を 1 年にとることは本質的ではありません。それが、半年ごとであっても 10 年ごとであっても、n に対する $n-1$ が決まった間隔であることが大事なのです。

漸化式 $a_n = 1.05a_{n-1}$ からも

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= 1.05a_{n-2} \\ a_{n-2} &= 1.05a_{n-3} \\ a_{n-3} &= 1.05a_{n-4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように、いくつもの関係が作られます。したがって、これらを順次もとの漸化式へ代入すれば

$$\begin{aligned} a_n &= \underline{10.5a_{n-1}} \\ &= 1.05(1.05a_{n-2}) \\ &= \underline{1.05^2 a_{n-2}} \\ &= 1.05^2(1.05a_{n-3}) \end{aligned}$$

$$= \underline{1.05^3 a_{n-3}}$$
$$\vdots$$

と変化する様子が分かるでしょう。さらに、式の変化—下線部—を注意深く追えば、1.05 の右肩の指数 $^\alpha$ と添字 $_{n-\alpha}$ に使われている数 α が一致していることに気づきます。見方を変えれば

$$(\text{指数}) + (\text{添字}) = \alpha + (n-\alpha) = n$$

であるということです。この先、式はどう変化するのでしょうか。

ここでも等差数列同様、添字が 1 になった時点で終了です。さらに、(指数) + (添字) $= n$ であったことを思い出してください。(添字) $= 1$ となったときは (指数) $= n-1$ のはずです。かくして a_n は

$$a_n = 1.05^{n-1} a_1$$

になった時点で完結します。これが、いま考えている数列の一般項なのです。

ためしに、$a_1 = 10,\ n = 10$ とるすると、これは 10 万円を年利 5%の複利で借りた 10 年後の返済合計額を意味します。

$$a_{10} = 1.05^{10-1} \times 10 \approx 15.5133$$

より 15 万円以上の返済を予測できるのです。

いまの考えを一般化すれば、初期値 a、増加比 r である数列 a_n は

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

で示されることが分かります[2]。この数列は**等比数列**と呼ばれます。ここでも a の添字 n に対して r の指数が 1 違いであることに注意しましょう。

*** *** 問 題 *** ***

1. 次の漸化式を考えます。

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3), \qquad a_2 = 1,\ a_1 = 1\ .$$

このとき、$a_{10} = pa_2 + qa_1$ を満たす p, q を求めてください。

2. 次の漸化式を考えます。

$$a_{n+1} = b_n - 5; \quad b_{n+1} = 2a_n, \qquad a_1 = 10,\ b_1 = 10\ .$$

このとき、a_{10} と b_{10} の値を求めてください。

[2] ratio—比、すなわち増加率。

3. 元金 A 円を利率 r で運用するとき、複利—元金と利息の合計に利率 r が乗じられる方式—なら $a_n = A \cdot r^{n-1}$ ですが、単利—元金だけに利率 r が乗じられる方式—なら a_n の一般項はどうなるでしょうか。

**　　**　　**　　**　　**

◆ ガウスの方法 ◆

ガウスが少年だった頃の出来事として、語り継がれている話があります。学校の授業で、先生が生徒に 50 から 400 まで（本当の数について私は知らないのですが）全部の数をたすように指示しました。先生は少し時間をかせぐために出したのに、わずかの時間でガウス少年が答えを出し、しかもそれが正解だったので先生は休んでいられなかった、というような話です。

これは

$$50 + 51 + 52 + \cdots + 399 + 400$$

を計算することです。おそらくガウス少年がとった方法は

$$\begin{array}{rcrcrcccrcr} 50 & + & 51 & + & 52 & + & \cdots & + & 399 & + & 400 \\ 400 & + & 399 & + & 398 & + & \cdots & + & 51 & + & 50 \\ \hline 450 & + & 450 & + & 450 & + & \cdots & + & 450 & + & 450 \end{array}$$

として、この場合 450 が全部で 351 個—$400 - 49 = 351$ であって $400 - 50 = 350$ でないことに注意—あることから、$450 \times 351 \div 2 = 78975$ と求めたのであろうと考えられています。もちろん最後に 2 で割っているのは、すべての数を 2 回数えているからです。

ところで、ここでは 50 からたし始めていますが、1 から n までの和を求めることに限定すれば、同じ理屈でその和 S_n が

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

であることが分かります。この式は覚えやすく利用価値もあって、いろいろな場面で使われます。

実は、この式ひとつで $50 + 51 + 52 + \cdots + 399 + 400$ を求めることもできるのです。それは

$$\overbrace{\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots 49}_{\text{ここまでの和をひく}} + 50 + 51 + 52 + \cdots + 399 + 400}^{\text{ここまでの和から}}$$

と見ることで

$$50 + 51 + 52 + \cdots + 399 + 400 = \frac{400 \times 401}{2} - \frac{49 \times 50}{2} = 78975$$

が求まります。ガウスのことですから、もしかしたらこの方法で計算たかも知れない. . . と考えたくもなります。