関数の足跡 –1–

関数の働き

みなさんは**関数**ということばから何を連想するのでしょうか。数学の勉強をしていれば即座に

$$y = 4x, \qquad y = x^2$$

のような関係式を思い浮かべるかもしれません。また、同時に関数をグラフに描くことも連想するでしょう。とくに、学校で忠実に数学を勉強しているほど、関数とグラフは切り離せないものになっていると思われます。

関数の原語は英語で言うなら “function” です[1]。これが日本語で “関数” と訳されるまでには、少々の回り道があったと言われています。中国で function は、その発音と意味から（日本の文字を使えば）“函数” と表現されるようです。もちろん日本でも以前は函数と書いていましたが、常用漢字の関係からでしょうか、“関数” に改められたということです。もちろん、これでも「数の関係」の意味を感じますから、それほど的外れではありません。

しかし、“函” には “はこ（箱）” の意味があります。ときどき関数の働きを演出するために、ブラックボックスなる教具が使われますが、ブラックボックスはまさに “函” 数の的を射た道具なのです。何かを箱に入れると、それが別のものとなって出てくる、これが関数の本質です。

実は、$y = 4x$ を数の関係と見る場合と、箱から別のものを出す働きと見る場合では大きな違いがあります。数の関係という見方では、代入する数に制限をつけたりしません。しかし、箱にものを入れるとなれば、何を入れるか意識するでしょう。なぜなら、箱に入らないものは入れられないからです。

たとえば、4 粒のチョコレートが入っているパッケージが x 箱あったとします。チョコレートの合計を y とすれば、$y = 4x$ で表される関係になります。では、$x = 3.14$ とした

$$y = 4 \times 3.14 = 12.56$$

の計算は成り立つでしょうか。

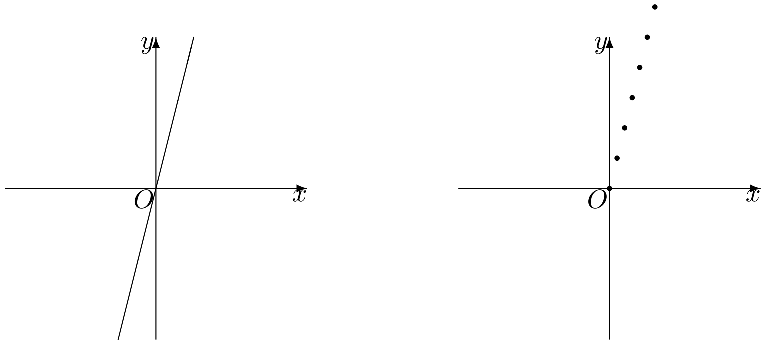
当然のことながら、この計算はだめです。なぜなら、3.14 個のパッケージというものを考えるのは、常識的ではないからです。ですから、x の値として考えられるのは 1, 2, 3, 4, ... に限られま

[1]function—機能、働き。

す（解釈の仕方で x の値に 0 を考えてもよいでしょう）。関係式 $y = 4x$ を、ある値を別の値にして吐き出す働きと考えれば、関数に確実に働いてもらうために自然数以外の数は代入できないことになります。

飛び飛びのグラフ

関数 $y = 4x$ をグラフに描くとき、私たちは特に意識せず直線を描くでしょう。でも、x と y が何を示しているか分からなければ、直線を描いてはいけない場合だってあるのです。



さきほどのチョコレートパッケージの例は、間違いなく後者です。その場合、グラフは飛び飛びの値をとるだけで、しかも負の値はとりません。こんなときはちょっと気取って、正の**離散変量**を**変域**とする関数である、なんて言ってもよいでしょう。

ここでは、規則的な離散変量を調べる際、グラフとは違う調べ方を試みることにします。

数列

引き続きチョコレートパッケージの例を使います。この場合、1 箱には 4 粒のチョコレートが入っていたので、1 箱, 2 箱, 3 箱, 4 箱, . . . と集めれば、チョコレートの合計（個数）は

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ \ldots \qquad (☆)$$

と変化します。もし、ここで何の予備知識もなくこれを見れば、ただ、数が列をなしているとしか見えないでしょう。ですから、このようなものを**数列**と呼びます。

さて、この先の話を円滑に進めるために、いくつかのことばを気取った言い方にさせてもらいましょう。

まず、数列のそれぞれの値は**項**と呼びます。上の例では、第 6 項まで書き出していて、第 7 項が 28 であることが想像できます。また、とくに第 1 項を**初項**と言うことがあります。さらに、この例を関数ととらえたときは $y = 4x$ なる関係でした。数列においてもこの関係はほぼ同じなのですが、文字 x を使うと何となく連続変数の印象になるものです。そこで、離散変量を表すときは習慣として文字 n を使います。すると、上の数列の第 n 項が $4n$ で計算されることもすぐに分かります。

もうひとつ、慣れてしまえばどうってことない—しかし、もしかすると馴染みがたい—書き方も使うことにします。いま、$4n$ は n 項目の値で、それはチョコレートの合計 y だったので $y = 4n$ と書きたいでしょうが、数列を扱うときには

$$a_n = 4n$$

と書くというものです。$_n$ は**添え字**もしくは**添え数**と呼んでいて、ここを見ることで第何項目かが分かる仕組みです。a_n の $_n$ と $4n$ の n が連動していることに注意してください。具体的には

$$a_1 = 4 \times 1 = 4, \qquad a_7 = 4 \times 7 = 28$$

のように使います。このようにして表された項 a_n を**一般項**と呼びます。

1 違いエラー

ここで話を関数と交差させながら続けましょう。1 箱 4 粒入りのチョコレートパッケージが x 箱あれば、チョコレートの合計 y との関係は $y = 4x$ でした。もし、はじめに 10 粒のチョコレートがあって、そこに x 箱のパッケージを加えれば、x と y の関係は $y = 10 + 4x$ です。しかし、x には自然数しか使えないので、具体的には

$$10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ 34,\ \ldots \qquad (\bigstar)$$

という数列が出来上がります。では、この数列 a_n を $a_n = 10 + 4n$ と書いてよいかというと、残念ながらそうはいかないのです。なぜでしょうか。

原因は、a_n の $_n$ と $4n$ の n が連動していることにあります。それは、（★）から底上げした 10 を取り払った数列を眺めるとはっきりします。その数列は

$$0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \ldots$$

ですから、（☆）とは 1 項分ずれています。したがって、0 から始まるこの数列の第 n 項は $4(n-1)$ で計算される値です。このことから（★）は

$$a_n = 10 + 4(n-1)$$

と書かなくてはなりません。実際、$n = 1, 2, 3, \ldots$ を代入すれば、$a_1 = 10, a_2 = 14, a_3 = 18, \ldots$ が現れることから、間違いないことが確認できますね。

このように、一般項の表し方には強い連動が働くために、1 違いエラーには十分注意を払わなくてはなりません。

*** *** **問　題** *** ***

1. たとえば、通話時間によって電話料金が決まる場合を考えてみましょう。ある電話会社では表のように料金が設定されているものとします。

通話時間 (分)	3 分以内	6 分以内	10 分以内	15 分以内	20 分以内	$\cdots$
料金 (円)	10	20	30	40	50	$\cdots$

この関係をグラフに描いてください。ただし、3 分 “以内” は 3 分を含みます。

2. 2 つの数列

$$\begin{array}{lcccccc} a_n: & 78 & 81 & 84 & 87 & 90 & \cdots \\ b_n: & 3 & 11 & 19 & 27 & 35 & \cdots \end{array}$$

のそれぞれについて、一般項を求めてください。また、$a_n = b_n$ となるのは何項目のことですか。

3. $n = 1, 2, 3 \ldots$ に対して a_{2n} と書いた場合、a_{2n} は偶数項だけを吐き出します。a_{2n-1} なら奇数項だけです。さて、$a_{2n+2} - a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n-1}$ が成り立つとき、数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ は等差数列といえるでしょうか。

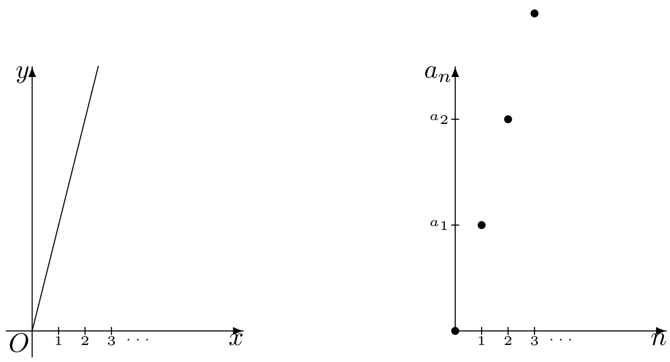
** ** ** ** **

◆ a_0 の考え ◆

関数 $y = 4x$ をもう一度振り返ってみましょう。これは正比例の関係にあたります。数列において比例関係に相当するものは、$a_n = 4n$ であることは前に述べました。そこで、数列は

$$a_1 = 4,\ a_2 = 8,\ a_3 = 12,\ \ldots$$

となるわけですが、関数のグラフ同様、数列もグラフ化すると変化を目で追いやすくなります。



グラフを比較すると、たしかに $y = 4x$ に相当するものは $a_n = 4n$ であることが分かります。そうすると、関数のグラフの原点に当たる数列の値を考えてもおかしくありません。実際、$a_n = 4n$ を 4 粒入りのチョコレートパッケージ n 箱と見れば、箱がないとき—つまり $n = 0$ のとき—はチョコレートの数も 0 ですから、$a_0 = 0$ があってもよい気がします。

実は、数列において**初項**を a_1 と書くか a_0 と書くかは、とくに決められているわけではありません。すると、初項は "第 1 項" から始まるとしても、"第 0 項" から始まるとしてもよいことになります。一般的には、数列は第 1 項から始まるとしているので、等比数列なら一般項は $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ であったわけです。もし、数列は第 0 項が始めとするなら、等比数列の一般項は $a_n = a_0 \cdot r^n$ と書かれるはずです。

いずれにせよ、初項として $n = 1$ もしくは $n = 0$ を当てはめれば、前者の場合は $a_1 = a_1 \cdot r^0$、後者の場合は $a_0 = a_0 \cdot r^0$ ですから、どちらもおかしなことにはなりません。ちなみに $r^0 = 1$ であると定義されています。

数列の添字には、気が抜けませんね。