広がる方程式の解 –2–

虚数単位

どうやら、2 次方程式には解があるものとないものが存在しているようです。しかし、考えてみると、解の公式を使う限りどんな 2 次方程式でも解けているのです。解けているが解がない。何だか、すっきりしませんね。そこで、私たちは $\sqrt{\ }$ の中が負の数でも、数であるとする立場をとることにします。それが実際に何を表すかは、ひとまず考えないことにします。

私たちが新たに考える数は、2 乗すると -1 になる数です。$x^2 = -1$ ですから、これを満たす x を

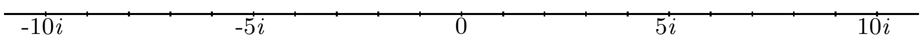
$$x = \sqrt{-1}$$

と書きます。すると、2 乗して負になる数は $a\sqrt{-1}$ の形となるでしょう。このような数を**虚数**と呼ぶとともに、$\sqrt{-1}$ はすべての虚数の基礎であることから、$\sqrt{-1}$ を記号 i で表し、**虚数単位**と呼ぶことにします。ちなみに、いままで私たちが扱ってきた数は**実数**と呼ぶ数です。そうすると

$$(a\sqrt{-1})^2 = (ai)^2 = -a^2$$

ですから、$(-) \times (-) = (+)$ であるように、とりあえず i は符号のようなものと考えて差し支えありません。

それでは、虚数はどう扱うべきでしょうか。実数が数直線上の数であったように、虚数も数直線上の数で扱えます。図は、その様子を示していて、直線上のすべての点は ai なる虚数です。



虚数直線と実数直線との違いは、虚数単位 i があるかないかだけです。そこで私たちは、実数直線上で成り立っている

1. 実数どうしのたし算

2. 実数どうしのひき算

3. 実数の定数倍（正の定数倍・負の定数倍；定数倍には割る場合も含む）

は、虚数直線上でも成り立つとします。それにより、たとえば

1. $3i + 5i = 8i$

2. $3i - 5i = -2i$

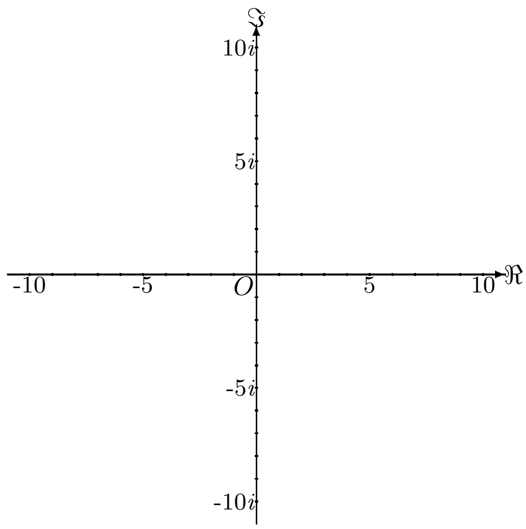
3. $(3i) \times 2 = 6i$, $(3i) \times (-2) = -6i$, $6i \div 2 = 3i$

のような計算ができるということです。

しかし、虚数直線上にはひとつだけ例外があります。実は $0i$ というのは

$$(0i)^2 = 0 \cdot (-1) = 0$$

ですが、2 乗して 0 になる数は 0 なので $0i = 0$ のはずです。つまり、虚数直線の上には、ただひとつの実数 0 が乗っていることになります。そうなると、虚数直線というのは独立に存在するものではなく、0 のところで実数直線と交錯していると考えたほうがよいかもしれません。そう考えると数を表すための道具は、 xy 平面のようなものとなって私たちの目の前に姿を現すのです。



複素平面

私たちの目の前に現れた平面は**複素平面**と呼びます。複素平面が、とくに xy 平面と違うことを強調するために、**実数軸**を $\Re$ で、**虚数軸**を $\Im$ で示しました[1]。ところで、虚数単位は $i^2 = -1$ な

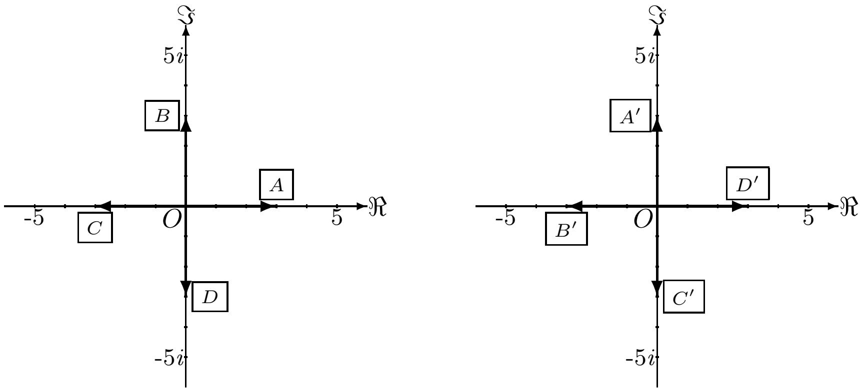
[1]実数軸 $\Re$ は "Real number"、虚数軸 $\Im$ は "Imaginary number" より。

る数でしたから、これは $i \times i$、すなわち「虚数の虚数倍」を定義したことにもなっています。虚数倍という計算は十分可能なのです。

では、虚数倍が何を意味するかを複素平面上で確かめてみましょう。簡単のため、実数直線上の数 3, -3 と虚数直線上の数 $3i$, $-3i$ に対して、それぞれ i 倍するとどうなるかを見ておきます。図では、A, B, C, D, $\ldots$ などの記号で表していますが、それらは

- $3 \times i = 3i$　（$A \to A'$）
- $3i \times i = 3i^2 = -3$　（$B \to B'$）
- $-3 \times i = -3i$　（$C \to C'$）
- $-3i \times i = -3i^2 = 3$　（$D \to D'$）

の計算に対応しています。



どうやら、i 倍する計算は、もとの数を反時計周りに 90° 動かす働きを持っているように見えます。このことから、私たちが $(-1) \times (-1) = +1$ と約束したことが、複素平面では実に自然なことのように思えてきます。それは、1 に i を一度ずつかけていく様子をながめるとはっきりすると思います。

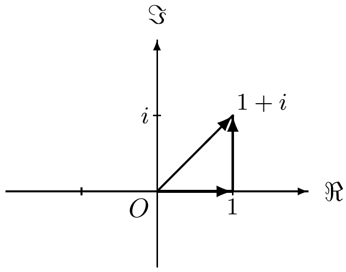
$$1 \quad \xrightarrow{\times(i)} \quad i \quad \xrightarrow{\times(i)} \quad -1 \quad \xrightarrow{\times(i)} \quad -i \quad \xrightarrow{\times(i)} \quad +1$$

複素数

虚数が実数と同じように扱える数であるなら、虚数と実数の計算も考えられるはずです。では、$1 + i$ はどうなるのでしょうか。その答えは複素平面が教えてくれますが、その前に、私たちは数に対する概念を少し修正する必要があります。

先ほど、複素平面において i をかける操作をした際、虚数・実数ともに**矢線**で表したことに気づいているでしょうか。そう、数は点ではなく、方向が分かるように矢線で示されるものです。その

考えに立てば、$1+i$ は、実数軸方向への 1 と虚数軸方向への i を合わせたものになります。合わせる操作には 2 つの矢線を用いますが、その結果はひとつの矢線で表すことができます。つまり、$1+i$ という数は、それ自体がひとつの数を表すのです。このことは、$1+\sqrt{2}$ がひとまとめにできなくても、2.41412$\cdots$ というひとつの数を表すことと似ています。



では、$1+\sqrt{2}=2.4142\cdots$ であるように、$1+i$ はどのような数を目にできるのでしょう。しかし、残念ながら同じような数値にはできません。なぜなら、数値は実数を表します。しかし、$1+i$ は実数ではないのでこれ以外に書きようがないのです。

$1+i$ は実数と虚数の和になっているので、このような数は**複素数**と呼ばれます。さらに、実数 a は $a+0i$、虚数 bi は $0+bi$ とみることで、いずれも複素数であると考えられます。つまり、実数も虚数も複素数の一部の数であったのです。

私たちは、ふつう $(1+2)^2=3^2=9$ の順で計算をするものですが、$(1+2)^2=(1+2)(1+2)=1+2+2+4=9$ としても、それは同じ結果が導かれます。複素数の計算においては前者のようにはできないので、同じ結果を導く後者の方法で計算するのが一般的です。たとえば

$$(1+i)^2=(1+i)(1+i)=1+i+i+i^2=1+i+i+(-1)=2i$$

のようにです。

こうやって考えると、複素数の計算にも実数の計算が使えるように思えますが、実際は話の進め方が逆で、実数が複素数の一部である以上、複素数で使える計算が実数でも使えている、というのが正しい見方なのかも知れません。

***　***　問　題　***　***

1. 実数の世界では

$$\sqrt{6}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$$

という、当たり前の計算も、複素数の世界では

$$\sqrt{6}=\sqrt{(-2)\times(-3)}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$$

などという、おかしな結果を招きます。もちろん、こんな計算は認められないので、どこかに間違いがあるはずです。どこが間違いのもとか考えてください。

2. 実数直線上の数 3, -3 と虚数直線上の数 $3i$, $-3i$ に対して、それぞれ $1+i$ 倍するとどうなるでしょうか。この結果から、ある数（実数でも虚数でもよい）を複素数倍することが、図形的にどんな意味を持つか類推できると思います。複素数倍は図形的にどんな意味を持っているか考えてください。

** ** ** ** **

◆ 複素数の大小関係 ◆

実数直線では、右にある数ほど大きな数になるので

$$2<3 \quad (☆)$$

であることは疑う余地がありません。虚数直線においても、右にある数ほど大きいとすると

$$2i<3i \quad (★)$$

と考えるのが自然でしょう。ところが、話はそう簡単ではありません。

(☆) と (★) の違いは i にありますが、(☆) の両辺に i をかけて (★) になったと見れば、$i>0$ ということでしょう。なぜなら、不等式においては、正の数をかけても不等号の向きは変わらないからです。それなら、(★) の両辺にもう一度 i をかければ、不等式の向きは変わらず

$$\begin{aligned} 2i\times i &< 3i\times i \\ 2i^2 &< 3i^2 \\ -2 &< -3 \end{aligned}$$

となって、不合理な結果になってしまいます。

このことは、(☆) に i をかけて (★) とする見方が悪いのではなく、複素数に合理的に大小関係を定義することができないのが原因です。なぜなら、大小関係というのは、実数直線の左右の関係にだけ与えられたもので、複素数のような複素平面全体にわたる関係に与えられるものではないからです。

ただし、複素数どうしでの大小をくらべることはできませんが、複素数に**距離**という概念を導入することはできます。それは原点からの距離に等しく、複素数 $a+bi$ に対して

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

と定義されるものです。この観点にしたがえば、$1+i$ と $2-i$ の大小はくらべられなくても、距離に関しては

$$|1+i| < |2-i| \quad （|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};\ |2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \text{ より}）$$

と言えるのです。