広がる方程式の解 –1–

2 次方程式の解の公式

まず、2 次方程式を解くところからはじめましょう。たいていの教科書には $x^2+x-6=0$ のような方程式を解く例が

$$\begin{aligned} x^2+x-6 &= 0 \\ (x+3)(x-2) &= 0 \\ x &= -3,\ 2 \end{aligned}$$

といった感じで載っていることでしょう。**因数分解**をして 2 次方程式が解けるのは、

$$AB=0 \qquad \Rightarrow \qquad A=0 \quad \text{または} \quad B=0 \tag{1}$$

である場合に限るという性質を利用していることと、2 次方程式を 1 次方程式にすり替えていることが大きな要因です。ここで記号「⇒」は「ならば」と読みます。したがって、(1) の意味するところは、積が 0 になれば少なくとも一方は 0 である、と言っているのです。何気ないことのようで、大変意義ある性質です。この性質のおかげで、かりに何らかの 3 次方程式があって、それが因数分解できて

$$x(x+1)(x-2)=0$$

であれば、$x=0,\ -1,\ 2$ の解を持つことが分かります。

では、因数分解ができない方程式は解くことができないのでしょうか。もちろんそんなことはありません。例として

$$x^2+2x-2=0 \tag{2}$$

を取り上げます。和が $+2$、積が -2 である 2 数は容易に見つけられないので、これが簡単に因数分解できないことは分かります。しかし、電卓で容易に確認できるように、$x=0.75$ ぐらいであれば左辺を大体 0 にすることができます。おそらく 0.75 近辺の値が解になっているのでしょう。

このように、解がありそうなのにそれを特定できないのはもどかしいですね。なんとか因数分解を工夫して解を求めてみます。そこで x^2+2x+1 であれば $(x+1)^2$ にできることに着目して、

(2) を次のように変形していったらどうでしょう。

$$\begin{aligned} x^2+2x-2 &= 0 \\ x^2+2x+1 &= 3 \\ (x+1)^2 &= 3 \\ x+1 &= \pm\sqrt{3} \\ x &= -1\pm\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

x^2+2x+1 を作るために、両辺に 3 を加えたところがミソです。解の一方— $-1+\sqrt{3}$ のほう—の近似値は 0.732 なので、さっきの電卓で確認できた値を正確に求めたことになっています。

注目すべきは、この方法ならどんな係数を持つ 2 次方程式でも解が求められることです。その**アルゴリズム**は次のようになるでしょう。

1. x^2 の係数を 1 にしておく
2. 左辺を $(\ \ )^2$ にするべく、適切な数を両辺に加える
3. 左辺を $(\ \ )^2$ に直す
4. 方程式を $X^2=k$ に見立て、$X=\pm\sqrt{k}$ と解く
5. X に含まれる数を右辺に移項し、2 次方程式の解とする

このアルゴリズムに則(のっと)って 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解くとにします。ここで a, b, c は、何らかの数値を表すものとします。また、$a=0$ だと 2 次方程式にならないので $a\neq 0$ とします。すると、2 次方程式は次の手順で解へたどり着くのです。

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0 && \text{（両辺を } a \text{ で割りました）} \\ x^2+\frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} && \text{（}(\ \ )^2 \text{ を見越して両辺に } \frac{b^2}{4a^2} \text{ を加えました）} \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} && \text{（右辺は } 4a^2 \text{ で通分しました）} \\ x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\ x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{（☆）} \\ x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,. \end{aligned}$$

解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を求めるのに、有効なアルゴリズムを手に入れたわけですが、そのたびに律儀に手続きをふむことはありません。私たちはアルゴリズムの最後の結果

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

だけを使い、解を求めることができるのです。これが、いわゆる 2 次方程式の解の公式です。

さっそく、前回登場した 2 次方程式 $x^2+2x-2=0$ に、解の公式を当てはめてみることにします。

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= -1\pm\sqrt{3}\ . \end{aligned}$$

同じ結果を得ましたね。方程式の解は最後の最後に約分ができ、少し簡単な式になっています。解の公式を何度か使っていると、最後にうまく約分できるものもあればそうでないものもあることに気づくはずです。このことは、あとで問題として考えてもらいましょう。

では、2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解はどうなるでしょうか。解の公式に当てはめると

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

と、一応の解が得られましたが、$\sqrt{-3}$ はどんな値でしょう。たしか $\sqrt{a}$ とは、2 乗すると a になる数を意味したので、$\sqrt{-3}$ なら 2 乗して -3 になる数です。しかし、2 乗して負の数になることはないので、この方程式には解がないと考えるのが自然でしょう。

*** *** **問　題** *** ***

1. 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が $x=\alpha,\ \beta$ であれば、$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できることを意味します。$6x^2+5x+1=0$ の解を求めることで、$6x^2+5x+1$ を因数分解してください。

2. 2 次方程式 $(\sqrt{2}-1)x^2-2x+(\sqrt{2}+1)=0$ を解いてください。また、その解が方程式を満たしていることを確認してください。

3. 公式を使って解を求めると、最後の最後に約分ができるものがあります。その場合は、ほとんどが $\sqrt{M}=2\sqrt{m}$ になっています。このような約分ができる方程式は、係数にどんな条件があるか考えてください。また、その条件のときに公式がどのようになるか考えてください。

** ** ** ** **

◆ 解の公式の重箱の隅 ◆

2 次方程式の解の公式を導く際に、

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad\to\quad \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

と計算したところ（☆）がありました。ここは、正しくは

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad\to\quad \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

とすべきなのです。しかし、実際は簡単に済ませています。理由は、結果的に同じ解が得られるからです。

まず、$\sqrt{a^2}=|a|$ であって $\sqrt{a^2}\neq a$ でないことを注意しておきます。なぜなら、たとえば $\sqrt{5^2}=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}$ であり、いずれも 5 が正しい値です。文字で表すと見えづらいところですが、$\sqrt{5^2}=5$、$\sqrt{(-5)^2}=5$ はともに、$\sqrt{}$ の中身をそのまま取り出しているのではなく、正の値にして取り出しています。これは絶対値をつけていることと同じです。

絶対値をつけることは

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることを意味します[1]。そのため、解の公式を導くための正しい計算は

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}=\begin{cases} \pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & (a>0 \text{ のとき}) \\ \mp\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なのですが、符号の順序が逆になるだけで結果的に同じ解が求められたからなのです。

[1] 記号 $\geq$ は、日本では $\geqq$ で表される不等号です。