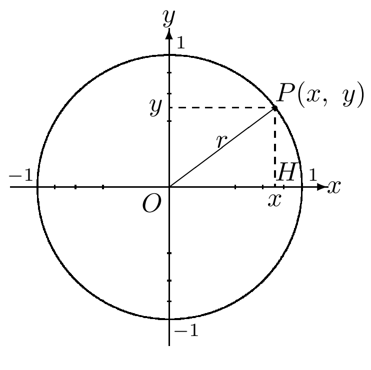
図形と方程式をつなぐ –2–

三平方の定理の利用

xy 平面に描かれた直線から相似な直角三角形を見い出し、そこに比例という性質を当てはめることで、直線が方程式 $ax+by+c=0$ となることを見てきました。すると、xy 平面に描かれた図形は、その性質をうまく取り出すことで方程式を作ることができるものと思われます。ここでは、直角三角形に**三平方の定理**を当てはめることで、xy 平面上に描かれた円が方程式に表せる様子を追っていきたいと思います[1]。

簡単のため、円の中心は原点 O にあるものとし、円の半径は特に決まってない値 r とします[2]。すぐに分かることですが、半径を特定の値に決めずに計算を進めるほうが、むしろ易しくなることを指摘しておきます。



さて、図において円周上の任意の点を $P(x,\ y)$ とします。P が円周上のどこにあろうとも、必ず図のような直角三角形 OPH ができることに注意しましょう。すると、どんなときでも底辺にあたる OH の長さは $|x|$ で、高さにあたる PH の長さは $|y|$ となります。ここで、記号 $|a|$ は**絶**

[1]三平方の定理：直角三角形の直角をはさむ 2 つの辺の長さを a, b、斜辺の長さを c とすると、常に $a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。

[2]原点 O は “Origin”、半径 r は “radius” より。

対値と呼び、a の正負に関わらず正の値として扱うための記号です。わざわざこんな記号を持ち出しているのは、座標の値を直接用いると負の数を使うことがあります。しかし、三角形の一辺としては正の数しか考えないのでこのようにしているのです。比の値で負の数を使ったときとは状況が違うのです。

いま、円の半径は特定せず r でしたから、$\triangle OPH$ に三平方の定理を当てはめると

$$|x|^2 + |y|^2 = r^2$$

が成り立つことが分かります。P は円周上のどこにあってもよかった点ですから、結局、この式が円の方程式を表すことになります。もっとも、座標の値 x を三角形の辺として扱うには $|x|$ とする必要があったのですが、正の数でも負の数でも 2 乗すると正の数になるのですから、方程式という点だけに着目すれば絶対値の記号を使う必要はありません。そのため、一般に円の方程式というと

$$x^2 + y^2 = r^2$$

で表すのが普通です。

円の方程式

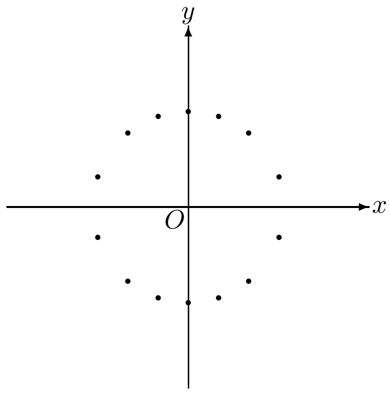
あんまり簡単に円の方程式が求められたので、少し拍子抜けしましたか？　これが本当に正しいことを確認しておきましょう。具体的な数値があるほうが理解しやすいでしょうから、円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 10$$

であるとします。ここで、たとえば $x = 1$ の場合は、$1^2 + y^2 = 10$ を解いて $y = \pm 3$ が、$x = 2$ の場合は、$2^2 + y^2 = 10$ を解いて $y = \pm\sqrt{6}$ が得られます。このようにして、$x = -4$ から $x = 4$ までの整数値で y を求めたのが次の表になります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	(解なし)	± 1	$\pm\sqrt{6}$	± 3	$\pm\sqrt{10}$	± 3	$\pm\sqrt{6}$	± 1	(解なし)

$x = 1$ に対する $y = \pm 3$ は、座標で $(1,\ 3), (1,\ -3)$ を意味します。これらの点だけを xy 平面に描いただけでも、円の雰囲気が出ているのが分かります。直線の方程式では、基本的に解がないことはありませんが、円の方程式では「解なし」となる部分があることに注意しましょう。



楕円の場合

円の方程式のついでに楕円の方程式にも触れておきましょう。**楕円 (だえん)** は、円をつぶした形をしています。つぶすという表現では数学らしくないし、第一正確さを欠いています。もう少し正確に言うなら次のようになるでしょう。円周上の点を x 軸または y 軸方向に、同じ割合で拡大・縮小したものが楕円である、ということです。

具体的に、円

$$x^2 + y^2 = 10 \tag{1}$$

を y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ の割合で縮小した楕円を考えます。これは、円周上の点を $(x,\ y)$ とすると、楕円上の点 $(x',\ y')$ が $(x',\ y') = (x,\ \dfrac{1}{2}y)$ になることを意味します。楕円上の点を $(x,\ y)$ ではなく $(x',\ y')$ と表現した理由は、円周上の点と楕円上の点をはっきりと区別するためです。もし、同じ文字 x, y を使ってしまったら、y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍することが $(x,\ y) = (x,\ \dfrac{1}{2}y)$ で表されてしまい、$y = 0$ という歓迎できない結果を導いてしまうからです。

それでは、楕円がどのような方程式になるかを見ていくことにします。いま、円周から楕円への変換を $(x',\ y') = (x,\ \dfrac{1}{2}y)$ としたので、x, y それぞれの変換は

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

となっています。このことから、x, y を逆に解いた

$$\begin{cases} x = x' \\ y = 2y' \end{cases}$$

を (1) へ代入すると、それが楕円の方程式になるのです。代入した結果は

$$x'^2 + 4y'^2 = 10$$

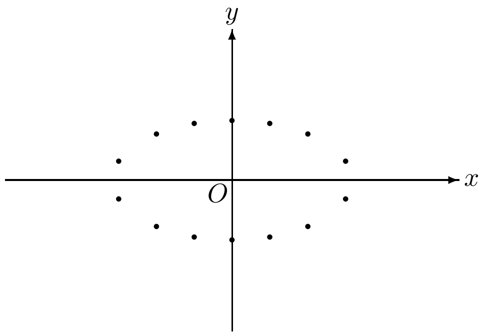
ですね。おやおや、疑いの目をしている人がいますね。この式が楕円であることを確かめるために、さっきと同じように $x' = -4$ から $x' = 4$ までの整数値で y' を求めてみます。

x'	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y'	(解なし)	$\pm\dfrac{1}{2}$	$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\pm\dfrac{3}{2}$	$\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$	$\pm\dfrac{3}{2}$	$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\pm\dfrac{1}{2}$	(解なし)

あとは、表の値を座標平面に描くだけです。ところで、ここまでは円周上の点と楕円上の点を区別するために、変数に x' と y' を使ってきました。しかし、一旦楕円の方程式を求めてしまえば、あえて区別しておく必要はありませんし、どうせ xy 平面に点を打つのです。そこで、楕円の方程式を改めて

$$x^2 + 4y^2 = 10$$

と見直して、xy 平面に点を打ってみましょう。どうです？　円 $x^2 + y^2 = 10$ を y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ の割合で縮小した楕円に見えるでしょう。



***　***　問　題　***　***

1. 円 $x^2 + y^2 = 10$ を x 軸、y 軸方向に同時に拡大・縮小しても楕円になります。x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍、y 軸方向に 2 倍した図形を描いてください。

2. 本文中では、楕円の方程式を $x^2 + 4y^2 = 10$ と表しましたが、一般には $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{\frac{10}{4}} = 1$ のように、右辺を 1 にし x^2, y^2 の係数も 1 となるように記述します。さらに踏み込んだ見方をすれば、分母は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

のように、平方数であると見るのです。このように表すと、a, b の値が表すものが明確になって便利だからです。a, b が何を示しているか考えてください。

**　**　**　**　**

◆ 楕円に関して ◆

楕円は、円を一定の割合で拡大・縮小したものであると定義してきましたが、円と関連づけた場合は別の定義ができます。円は

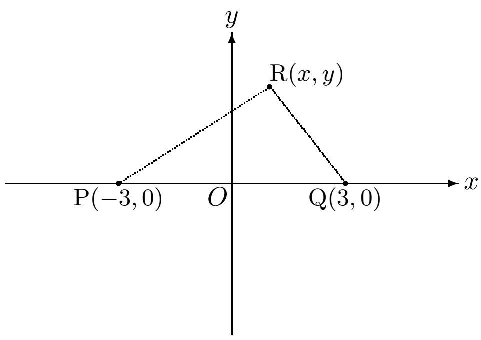
1 点からの距離が一定の点の集合

ということになっています。この場合、1 点というのが円の中心です。一方、楕円は

2 点からの距離の和が一定の点の集合

ということになります。この場合、2 点は楕円の**焦点**と呼ばれます。

具体的に、2 点を $P(-3,0), Q(3,0)$ とし、この 2 点からの距離の和が 8 となるような点 R を考えます。この場合、$PR+RQ=8$ ということです。



図では 1 点だけを示していますが、実際は $PR+RQ=8$ となる点はたくさん取れます。しかし、そのような点がどこにあっても、$R(x,\ y)$ は $PR+RQ=8$ の関係を保っているので、三平方の定理から

$$\begin{aligned} PR+RQ &= 8 \\ \sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2} &= 8 \quad (☆) \end{aligned}$$

となっていることが分かります。

(☆) を一旦移項して、両辺を 2 乗したのち整理すると

$$\begin{aligned} (\sqrt{(x+3)^2+y^2})^2 &= (8-\sqrt{(x-3)^2+y^2})^2 \\ x^2+6x+9+y^2 &= 64-16\sqrt{(x-3)^2+y^2}+x^2-6x+9+y^2 \\ 3x-16 &= -4\sqrt{(x-3)^2+y^2} \end{aligned}$$

となるので、ここでもう一度両辺を 2 乗して整理します。

$$
\begin{aligned}
(3x-16)^2 &= (-4\sqrt{(x-3)^2+y^2})^2 \\
9x^2-96x+256 &= 16(x^2-6x+9+y^2) \\
7x^2+16y^2 &= 112 \\
\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7} &= 1\ .
\end{aligned}
$$

これは、 x 軸の径が 4、y 軸の径が $\sqrt{7}$ の楕円を表す方程式です。