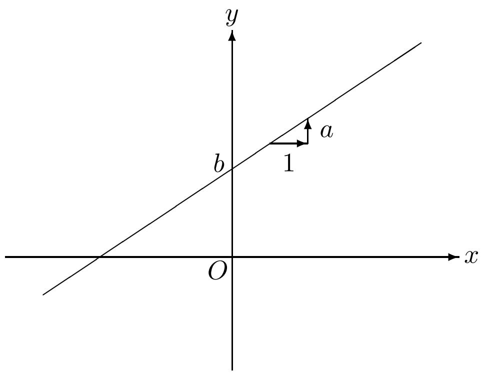
図形と方程式をつなぐ –1–

直線の方程式

皆さんは**直線の方程式**を知っていますね。方程式と言うと仰々(ぎょうぎょう) しいので、単に直線の式と呼んでいたかも知れません。それは多くの場合

$$y = ax + b$$

と書いて、a を直線の**傾き**、b を ***y* 切片**—または、単に切片—と呼んでいたことでしょう。その情報のおかげで、直線の式は ***xy* 平面**にグラフとしてその姿を現したのでした。



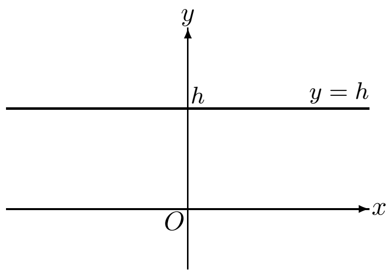
この図を見て、a が整数ならたしかに傾きの表現は のようになるけれど、かりに a が $\dfrac{m}{n}$（ただし m, n は整数）のような分数なら と描かないと正確ではないと感じた人はいませんか？　それは素直な感覚ですが、実際には $a = \dfrac{m}{n}$ であっても でよいのです。

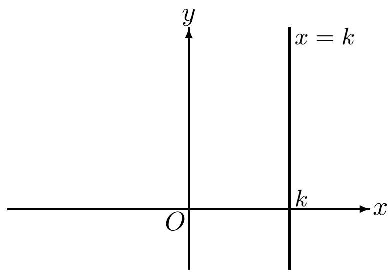
それに、直線の傾きが $a = \sqrt{2}$ のような数であれば、a は決して $\dfrac{m}{n}$ のような分数に表せないので、やはり傾きの比は $a : 1$ と考えるべきなのです。少し横道にそれてしまいましたね。$\sqrt{2}$ が $\dfrac{m}{n}$ のような分数に表せないことはあとで説明するとして、いまは直線の話に戻りましょう。

ところで、グラフ上の直線は、横に真直ぐだったり縦に真直ぐだったりすることもあるので、その場合の直線の方程式は $y = ax + b$ の形ではなく、

$$y = h \quad (h \text{ は定数}) \qquad や \qquad x = k \quad (k \text{ は定数})$$

と書くのだと覚えた人もいるでしょう。





傾きや切片という考えを導入することは、式と直線を効果的に関連づけるには良い方法です。しかし、直線的な関係—すなわち比例関係—が、ある一定の条件のもとで成り立つという視点に立てば、やはり直線の式は方程式であると考えるべきでしょう。

ここで、方程式が普通の等式とどう違うか説明しておきましょう。次に示す 3 つの式はすべて等式です。等号で結ばれた式を等式と呼ぶからです。

$$1+2+3 = 10 \tag{1}$$

$$2x-3 = -5 \tag{2}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \tag{3}$$

しかし、いくら等号で結ばれていても (1) は正しい式を表していません。したがって、これは無効な等式とでも呼べばよいでしょうか。(2) の等式は、$x=1$ では無効な等式ですが、$x=-1$ なら正しい等式になります。このように、特定の値でのみ有効な等式となるものを**方程式**と呼んでいます。ちなみに (3) は、どんな a, b に対しても成立する等式なので、特に**恒等式**と呼んで方程式とは区別しています。恒等式は常に成り立つ等式ですから、公式にしておく価値を備えています。皆さんは、きっといくつかの恒等式を目にしているはずです。

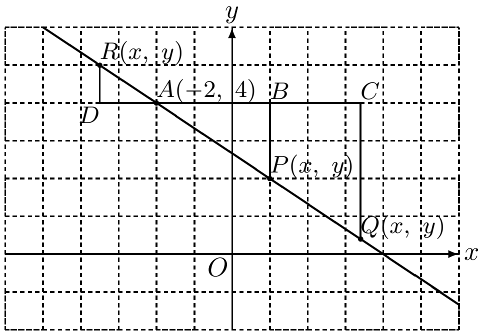
余談ですけれど、たとえば $3x-5x=2(1-x)$ という等式は、これを満たす特定の x がない—つまり解が存在しない—のですが、これも方程式と呼びます。少し禅問答のような言い方をすれば、この等式を満たす特定の x は 0 個存在しています。つまり、0 個の値でのみ有効な方程式というわけです。すると、(1) も同じ状況に見えますが、こちらは特定の値を探す以前に、$6=10$ 自体が等式として意味を持っていない点で異なっているので、方程式になりえません。

座標と方程式

では、直線が方程式であるとはどういうことでしょう。先ほど言ったように、特定の値でのみ成り立つ等式が方程式ですから、直線はそうなっているはずです。実際、xy 平面は四方八方に広がっ

ている平面、すなわちあらゆる点の座標を持っていますが、見てのとおり直線は、一筋の線として目の前に現れています。これは、特定の点の座標が集まっている部分を目にしていることになります。つまり、直線は x 座標と y 座標に何らかの関係を保っている方程式と考えられるのです。

それでは、具体的に直線が方程式であることを見ましょう。



図の直線は、点 $A(-2,\ 4)$ を通っているものとします。直線上には他にも x 座標と y 座標を持つ点が無数に存在しています。しかし、それらの点がどれであっても、図の直線上にある限り、ひとつの性質を満たしています。それは、点 A と直線上の点を斜辺とする直角三角形—ただし底辺は x 軸に、高さは y 軸に平行—を作ると、それらは皆、相似な直角三角形になっているという性質です。このことは、図の $\triangle ABP$、$\triangle ACQ$、$\triangle ADR$ を見れば明らかでしょう。

相似な図形において対応する辺の比は一定ですから、$\triangle ABP$ を例にとれば (底辺) : (高さ) $= 3 : (-2)$ であることが分かります。突然、比の値に負の数が現れてびっくりしたでしょう。しかし、このことは座標上で考えるとごく自然なことなのです。というのは、$\triangle ABP$ で底辺の長さ AB や高さ BP を考えるとき、点 A を基準にすると

$$AB = x - (-2), \qquad BP = y - 4$$

と計算するはずです。「(ある頂点・P などの座標) − (基点 A の座標)」としているところがポイントです。この場合、底辺にあたる $(x - (-2))$ は正の値ですが、高さにあたる $(y - 4)$ は負の値になっています。$\triangle ADR$ の場合は、逆に底辺が負の値で高さが正の値ですから、(底辺) : (高さ) $= (-3) : 2$ と考えるのです。

$\triangle ABP$ に限らず、点 $A(-2,\ 4)$ と直線上の任意の点 $(x,\ y)$ までを斜辺と見ると、直角三角形の底辺が $(x+2)$、高さが $(y-4)$ であり、その比が $3 : (-2)$ もしくは $(-3) : 2$ であることが分かります。すなわち

$$(x+2) : (y-4) = 3 : (-2) \qquad \text{もしくは} \qquad (x+2) : (y-4) = (-3) : 2$$

ということです。$a : b = c : d$ が $ad = bc$ であることを利用して、左側の等式を整理してゆくと

$$(x+2) : (y-4) \quad = \quad 3 : (-2) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} -2(x+2) &= 3(y-4) \\ -2x-4 &= 3y-12 \\ 2x+3y-8 &= 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

となり、たしかに方程式になっています。これは、特定の関係を満たす点—直線上の点 $(x,\ y)$—に関する方程式ですから、(5) は直線の方程式であると言えます。ちなみに、(5) を

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \qquad (6)$$

と書き直せば、いままで見なれた直線の式の形になります。$(x+2):(y-4) = (-3):2$ の関係で考えても、直線 (6) を表すことは各自で確認してください。

方程式 $ax + by + c = 0$

それでは、逆に $ax + by + c = 0$ の方程式は必ず直線を表すのでしょうか。もしかしたら、特別な数値が使われたら直線にならないかも知れません。でも、ご安心を。この方程式を次のように変形してみます。

$$\begin{aligned} ax+by+c &= 0 \\ ax &= -by-c \\ ax &= -b\left(y+\frac{c}{b}\right) \\ x : \left(y+\frac{c}{b}\right) &= (-b):a \\ (x-0) : \left(y-\left(-\frac{c}{b}\right)\right) &= (-b):a\ . \end{aligned}$$

何やら複雑な式変形をしている様子がうかがえます。しかし、式を下から上へながめれば、$A:B = C:D$ を $AD = BC$ へ直しただけと気付くでしょう。注目するのはいちばん下の式です。これは、左辺・右辺ともに (底辺) : (高さ) の比を表しています。左辺は、基点を $(0,\ -\dfrac{c}{b})$ とし点 $(x,\ y)$ までを斜辺とする直角三角形における底辺と高さの比で、それが右辺の $(-b):a$ であることを示しています。このように底辺と高さの比が一定となる直角三角形の斜辺は、ひとつの直線上に乗るので、この式は直線上にある点の集合を表しています。基点の座標が $(0,\ -\dfrac{c}{b})$ であることから $-\dfrac{c}{b}$ が y 切片であり、底辺と高さの比 $(-b):a$ から傾き（$= \frac{(\text{高さ})}{(\text{底辺})}$）が $-\dfrac{a}{b}$ であることが分かります。実際、$ax + by + c = 0$ を y について解けば $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ となっています。

ところで、ここまでは暗に $b \neq 0$ として話を進めてきました。b の値が 0 になることがあれば、$-\dfrac{c}{b}$ や $-\dfrac{a}{b}$ のような分数は扱えません。なぜなら、分母が 0 である分数は**定義**できないからです。すると $b = 0$ となる場合は、特別な考察をしなくてはなりません。

と言っても難しい話ではありません。簡単のため、$ax+by+c=0$ において $a=1,\,b=0,\,c=1$ で考えます。すると方程式は

$$1x+0y+1=0 \quad \text{より} \quad x=-1$$

と解けてしまいました。しかし、方程式の解も立派な方程式なのです。なぜなら、もともとの方程式がどんなに複雑でも、等式関係を保ったまま式を変形しているのですから、その等式は最後まで方程式です。いまの例なら、$x=-1$ という特定の値でのみ正しい方程式と言ってよいでしょう。ちょっと寄り道が過ぎましたが、では、$x=-1$ という方程式は直線でしょうか？　図形と関連づけるなら、なんとなく点になるのではないかと思われますね。

実は、$x=-1$ だけでは直線とも点とも言い切れないのです。これは、数直線上で考えれば点を表し、xy 平面で考えれば直線を表すからです。ちなみに、空間では平面を表すのですが、これは別の機会の話としましょう。

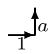
$x=-1$ が現れるもとになった式は $1x+0y+1=0$ でしたから、これを満たす特定の $x,\,y$ の組が方程式の解です。$0y$ においては、y がどんな数であっても 0 になってしまうので、$x=-1$ でありさえすれば、無数の y がペアを組めるのです。その組を $(x,\ y)$ で表すと

$$\ldots,\ (-1,\ -2),\ (-1,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ 3),\ \ldots$$

をはじめとして、$(-1,\ q)$ の組はすべて該当します。当然 y 座標の q には、整数以外の数を与えてかまわないので、$x=-1$ は直線を表していることが分かります。

ちなみに、$a=0$ の場合は特別な考察は必要ありません。なぜだか分かりますよね。

***　***　問　題　***　***

1. 直線 $y=ax+b$ において傾きが $a=\dfrac{m}{n}$ であっても、グラフの変化を 

としてよいことを説明してください。

2.「分母が 0 である分数は定義できない」のはどのような理由からでしょうか。たとえば、$\dfrac{a}{b}=p$ とすると、$a=p\times b$ となります。このとき $b=0$ の場合はどんな不都合があるか考えてください。また、$a=b=0$ での不都合も考えてください。

3. 直線の方程式を $y=ax+b$ で表すことにすると、どうしても表すことのできない直線が存在することを示してください。また、直線を $ax+by+c=0$ で表すことにすると、あらゆる直線が表せることを示してください。

**　**　**　**　**

◆ $\sqrt{2}$ が $\dfrac{m}{n}$ とかけない理由 ◆

$\sqrt{2}$ が決して $\dfrac{m}{n}$（ただし m, n は整数）のような分数に表せないことを証明しておきます。証明は、もし $\sqrt{2}$ が $\dfrac{m}{n}$ とかけたとすると、矛盾を生じることを利用します。

はじめに $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ とかけたとします。ふつう分数は約分しておくものですから、ここでも m と n には共通の約数がないものとします。

さて、$\sqrt{2}$ は 2 乗すると 2 になる数ですから、$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ の両辺を 2 乗すると

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

と書き直すことができます。分母を払って

$$2n^2 = m^2 \quad (☆)$$

です。ここで、左辺は偶数を表していることに注意しましょう。すると、当然右辺の m^2 も偶数でなくてはなりませんが、2 乗して偶数になる数は偶数しかありえません。つまり m は $m = 2m'$ となっているはずです。これを (☆) に代入して整理すると、今度は

$$n^2 = 2m'^2$$

が得られます。すると、さっきと同じ理由で $n = 2n'$ でなくてはならないはずです。

はてさて、$\sqrt{2}$ は共通の約数がない分数 $\dfrac{m}{n}$ のはずだったのに、以上の考察で $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{2m'}{2n'}$ とかけることになってしまい、共通の約数 2 の存在が明らかになってしまいました。

なぜこんなことになったかと言えば、はじめに $\sqrt{2}$ が $\dfrac{m}{n}$ とかけると考えたからです。つまり、矛盾を導いてしまったはじめの考えが間違っていたことになります。$\sqrt{2}$ は $\dfrac{m}{n}$ とかけない数なのです。

このように、はじめの**仮定**から矛盾を導く証明方法は**背理 (はいり) 法**と呼ばれ、有効な証明方法として知られています。また、整数を用いて $\dfrac{m}{n}$ とかける数を**有理数**、そうでない数を**無理数**と呼びます[1]。したがって、$\sqrt{2}$ は無理数ということになります。

[1] “rational number” が有理数、“irrational number” が無理数の語源ですが、定義の仕方から、“ratio-nal number” が比の数（有理数）、“ir-ratio-nal number” が比でない数（無理数）と考えたほうがよいでしょう。