文字式の約束の延長 –2–

交換法則・結合法則・分配法則

私たちが何気なく行う計算は、実は大変重要な法則を前提としています。それは

■ 和の交換法則、積の交換法則

$a+b=b+a,\quad a\times b=b\times a$

■ 和の結合法則、積の結合法則

$(a+b)+c=a+(b+c),\quad (a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

■ 分配法則

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c,\quad (a+b)\times c=a\times c+b\times c$

というものです。どれも当たり前のことだと思うでしょう。けれど、$10-5\neq 5-10$ や $(24\div 6)\div 2\neq 24\div(6\div 2)$ から分かるように、計算というものは必ずしも自由に交換や結合ができるものではありません。ここからは、式の変形にこれらの法則が無意識に登場します。少しばかり冗長な式変形をする場面があるでしょうが、注意深くながめてください。

指数でかけ算がなされるとき

文字式において、$x^{a+b}=x^a\times x^b$ や $x^{a-b}=\dfrac{x^a}{x^b}$ が計算上の約束として成り立つなら、指数自体にかけ算やわり算を取り入れることは可能でしょうか。つまり $x^{a\times b}$ や $x^{\frac{a}{b}}$ に相当する計算が定義できるかどうかということです。

もし、x^6 を $x^{2\times 3}$ で計算したと見たら、そこではどんなことが行われているのでしょう。2×3 の考え方は様々ですが、ここでは $2\times 3=2+2+2$ もしくは $2\times 3=3+3$ であると見ます。$2\times 3=2+2+2$ と見た場合は $x^{a+b}=x^a\times x^b$ の理屈から

$$x^6=x^{2\times 3}=x^{(2+2)+2}=x^{(2+2)}\times x^2=x^2\times x^2\times x^2$$

の意味になるはずです。ここで、一旦 $a\to(2+2),\ b\to 2$ と見ていることに注意してください。$x^{a+b}=$

$x^a \times x^b$ の理屈では、指数はあくまでも 2 項 a, b の和を考えているだけだからです。結局、$x^2 \times x^2 \times x^2$ は x^2 を 3 個かけ合わせているので $(x^2)^3$ となります。

また、$2 \times 3 = 3 + 3$ と見れば

$$x^6 = x^{2\times 3} = x^{3+3} = x^3 \times x^3 = (x^3)^2$$

です。どうやら $x^{a\times b} = (x^a)^b$ か $x^{a\times b} = (x^b)^a$ との見方が成立するようですね。

実際、べき乗が行う計算を基本に立ち戻って考えれば、

$$\begin{aligned}(x^a)^b &= \overbrace{x^a \times x^a \times \cdots \times x^a}^{b\text{ 個}} \\ &= x^{\overbrace{a + a + \cdots + a}^{b\text{ 個}}} \\ &= x^{a\times b}\end{aligned}$$

から、$(x^a)^b = x^{a\times b}$ が成り立つことが分かります。これで、またひとつ指数計算に関する約束ができたことになります。

指数でわり算がなされるとき

今度は、指数にわり算が使われたときを想定します。もし、x^3 を $6 \div 2$ で計算したと見たら、どんな考えに基づけばよいのでしょう。

まず、わり算ですが、分数を使えばわり算と同値なかけ算に直すことができることに注意します。つまり $6 \div 2 = 6 \times \dfrac{1}{2}$ と見ることにすれば

$$x^3 = x^{6\div 2} = x^{6\times\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}\times 6}$$

ですが、指数計算における約束からこれは $(x^{\frac{1}{2}})^6$ であるわけです。すなわち

$$x^3 = (x^{\frac{1}{2}})^6 \tag{1}$$

が成り立たなければ困ることになります。

もちろん $x^{\frac{1}{2}}$ を、x を $\dfrac{1}{2}$ 個かけ合わせると考えるのは日常の感覚には合いません。そこで、(1) が正しくなるような $x^{\frac{1}{2}}$ の解釈を与える必要があるのです。(1) を右辺側から見ると、6 乗することが結果的に 3 乗することに等しいわけですから、$x^{\frac{1}{2}}$ は $\sqrt{2}$ であるとみなすのが自然であるように感じます。

実際、そのようにみなせば

$$(x^{\frac{1}{2}})^6 = (\sqrt{x})^6 = x^3$$

は計算上何の問題もありません。ただ、ひとつ注意が必要です。それは、あらかじめ $\sqrt{x}$ を用いていることから分かるように、$x \geq 0$ でなければなりません。$\sqrt{}$ 内の数は 0 以上の数に限るからです。ここが、いままでの約束と違う点です。

累乗根

$\sqrt{2}$ は 2 乗して 2 になる数を表します。なぜ、そのような記述をするかといえば、2 乗して 2 になる数—すなわち $1.41421356\cdots$ —は小数点以下に無限の数が並ぶので、正確に書けないからです。また、分数で表すこともできません。そのために新たな記号 $\sqrt{}$ を必要としたのです。

2 乗して 2 になる数を考えることができるなら、3 乗して 2 になる数や 4 乗して 2 になる数を考えることもできるでしょう。これらは

$$a^3 = 2, \qquad b^4 = 2$$

である a や b を求めることを意味します。具体的な数値を示すなら

$$a = 1.25992105\cdots, \qquad b = 1.189207115\cdots$$

です。電卓などで a を 3 回かけたり、b を 4 回かけたりしてください。それがほぼ 2 になることが確認できるはずです。しかし、これでは正確な記述をしていませんね。そこで $x^2 = 2$ なら $x = \sqrt{2}$ と解くように、$a^3 = 2,\, b^4 = 2$ を満たす数を

$$a = \sqrt[3]{2}, \qquad b = \sqrt[4]{2}$$

で表すことにします。一般に $x^n = a$ のとき、$x = \sqrt[n]{a}$ と書いて、n 個かけて a になる数を表します[1]。この約束から、$x^2 = 2$ においては本来 $x = \sqrt[2]{2}$ と書くべきでしょうが、習慣として ^{2} は省いています。数学では 1 の省略はよくありますが、2 が省略される珍しい例です。

ところで、こんな計算は数学の理屈だけのものじゃないの？と感じる人はいませんか。4 回のかけ算で 2 になる数を求めることは、普段の生活には無関係だと思うかもしれませんね。でも、このような考えはとても重要なものです。金利の計算で、仮に手持ちの資金を 4 年で 2 倍にすることを考えましょう。これは増加率を r として $r^4 = 2$ を考えていることになります。さきほど示した数値によると r はおよそ 1.189 なので、毎年 1.189 倍で運用すれば目標に達します。つまり年 18.9%の割合で利益をあげればよいのです。日常的ににも、けっこう必要な計算ではないでしょうか。

[1]「a の n 乗根」と呼びます。

話を戻しましょう。$x^{\frac{1}{2}}$ という記述の仕方が $\sqrt{x}$ とみなせるのは、$(x^{\frac{1}{2}})^2=(\sqrt{x})^2=x$ だからでした。そういうことなら $x^{\frac{1}{n}}$ という記述の仕方は十分実用になります。それは

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n}\times n} = x$$

と計算できることから、$x^{\frac{1}{n}}$ は n 個かけて x になる数、すなわち $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ と約束すればよいからです。

以上のことから、指数に整数や有理数を用いてもつじつまが合うことが分かりました。まとめておきましょう。

■ 指数法則

$a>0$ である実数、m, n を整数とするとき

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

4. $(a^m)^n = a^{m\times n}$

5. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

6. $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^m}$

*** *** **問　題** *** ***

1. $0^0=a$ と置きます。$0^0=0^{0+0}$ と見た場合、a の値はいくつと考えるのが妥当でしょうか。

2. $0^0=a$ と置きます。$0^0=0^{0\times0}$ と見た場合、$0^0=(0^0)^0$ すなわち $a=a^0$ です。すると $a^1=a^0$ から $1=0$ との結論になってしまいます。何がおかしいと思いますか。

3. 最後にまとめた指数法則では、$a>0$ という条件を付けていますが、必ずしも $a>0$ でなくともよい場合があります。それは、どの指数法則でしょうか。

** ** ** ** **

◆ $x^{\sqrt{2}}$ とは？ ◆

指数に有理数を用いても一貫した計算規則を作ることができました。すると、指数に無理数を使ってみたくなるのが人情というもの。たとえば $2^{\sqrt{2}}$ のように。

しかし、このことは $\sqrt{2}$ が無理数であるために考えを難しくしています。$2^{1.41421356\cdots}$ としてみても、指数に終わりがないので計算のしようがないからです。これは、指数が無限小数になっているからだめというのではありません。指数が無限小数であっても $2^{1.666666\cdots}$ であれば

$$2^{1.666666\cdots} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} \approx 3.174802104\cdots$$

と計算することができるからです。無理数は分数で表すことができないので、このような計算ができないのです。

そこで、直接 $2^{\sqrt{2}}$ を求めることはあきらめて、間接的に計算することにします。無限小数を一度に見渡すことはせず、ひとつずつ区切って見ることにすれば

$$2^{1.4},\ 2^{1.41},\ 2^{1.414},\ 2^{1.4142},\ 2^{1.41421},\ 2^{1.414213},\ \ldots$$

が進むにつれて、$2^{\sqrt{2}}$ に近付くことになります。この数列は

$$2^{\frac{14}{10}},\ 2^{\frac{141}{100}},\ 2^{\frac{1414}{1000}},\ 2^{\frac{14142}{10000}},\ 2^{\frac{141421}{100000}},\ 2^{\frac{1414213}{1000000}},\ \ldots$$

と同じことですから、定義に従って

$$\sqrt[10]{2^{14}},\ \ \sqrt[100]{2^{141}},\ \ \sqrt[1000]{2^{1414}},\ \ \sqrt[10000]{2^{14142}},\ \ \sqrt[100000]{2^{141421}},\ \ \sqrt[1000000]{2^{1414213}},\ \ldots$$

から次々と値を求めることができます。実際、数列は

$$\begin{aligned}&2.639015822\cdots,\ 2.657371628\cdots,\ 2.66474965\cdots,\ 2.665119089\cdots,\\&2.665137562\cdots,\ 2.665143104\cdots,\ \ldots\end{aligned}$$

と変化し、$2^{\sqrt{2}} \approx 2.665$ であることが分かります。