# 文字式の約束の延長 –1–

## 大きな数と小さな数

皆さんは大きな数や小さな数をどのように表していますか。100,000,000 円は大きな数の仲間に入りますか？　0.000001 秒は小さな数の仲間に入りますか？　もちろんこれらは大きな数や小さな数を表していますが、世の中にはもっと大きい数や小さい数を扱うことがあります。たとえば宇宙の果て—観測できる限界—は

$$189200000000000000000000000 \text{ m}$$

程度であると考えられていますし、原子核の大きさは

$$0.00000000000001 \text{ m}$$

程度だと言われています。こうなるともう私たちには大きさの想像などできません。さらに困るのは、このような数は計算に不向きだということです。0 の数を数え間違えて計算してしまったら大変ですから。

そこで、このような場合は $1.892 \times 10^{26}$ や $1.0 \times 10^{-14}$ などと記述します。10 の右肩に乗っているのは**指数**で、指数を見れば 1 の後ろに 0 がいくつ付いているかが分かる仕組みです。$10^{26}$ なら、1 の後ろの 0 は 26 個です。また、指数が負の数のときは、0. で始まる小数の 0 の数を表します。$10^{-14}$ なら、0. の 0 を含めて 14 個の 0 があることが分かります。お陰で 0 の数え間違いからは解放されます。ただし、計算に使うにはそれなりの約束があるので、約束を守った上で計算をしないといけません。今回はこのような数の計算上の約束についてです。

## 積の指数法則

小学校までは、計算は主に具体的な数値で行っていました。それが中学校からは主に文字式で扱うようになります。文字式で扱う利点は、一般的な考察ができることです。ただし、文字式を使うためにはある程度の約束を守らなければなりません。

たとえば $3 \times a$ は 3 と 数 $a$ とのかけ算です。文字 $a$ は、実際は数であることが重要な点です。$3 \times a$ と書いてあっても、本当は $3 \times 100$ かもしれないのです。かけ算では $3 \times a$ も $a \times 3$ も同じ答になりますが、記号 $\times$ を省略する約束の下では、$3a$ と書かなくてはなりません。数と文字の積では、数を前に書くと決めているからです。

また、文字を用いて分数を表せば $\dfrac{a}{b}$ などと書きますが、$b \neq 0$ であることは暗黙の了解です。なぜなら、分母に 0 を置く—つまり 0 でわる—ことは数学の禁止事項だからです。このように、文字を扱うときは多少の気配りがいるものなのです。

さて、かけ算においては、同じ数を何度もかけることがあります。具体的には $5 \times 5 \times 5$ や、$x \times x \times x$ などがそれです。この例では、いずれも同じ数を 3 つかけ合わせています。こういう場合は、$5 \times 5 \times 5 = 5^3$ や $x \times x \times x = x^3$ のように、右肩に小さく指数を書く約束です[1]。さっきは簡単のため、$10^{26}$ は 1 の後ろに 0 が 26 個と言いましたが、実際は 10 を 26 個かけていることになります。では、$10^{-14}$ は 10 を $-14$ 個かけているかというと、そうではありません。詳しくは後の話になりますが、これは 0.1 を 14 個かけているのです。「10 のマイナス何乗」と言う場合は、10 ではなく 0.1 を何個かかける約束だからです。いろいろと、決まり事が出てきましたね。しかし、決まり事を正しく使いこなすことができれば、それが制約になることはありません。むしろ約束のために、話を円滑に進めることができるのです。

それでは、計算上の約束の話に移ることにします。はじめに、$x^a \times x^b$ を考えます。まず $x$ ですが、数 $x$ を何度もかける場合には、それが整数であっても分数であっても、また負の数であってもかけ合わせることができます。したがって、このような計算では $x$ にどのような数を考えてもかまいません。一般にそのような数は**無理数**も含めて**実数**と呼んでいるので、$x$ は実数と考えておきます。しかし、その $x$ をいくつかけ合わせるかを表す指数 $a, b$ はそうはいきません。日常の感覚では、かけ合わせる回数は 1 以上の**自然数**と考えるのが普通でしょう。つまり、単純に $x^a \times x^b$ と記述しても、暗黙の了解として

$$x \text{ は実数}, \quad a,\ b \text{ は 1 以上の自然数}$$

という条件が付いて回るのだと思ってください。

その上で $x^a \times x^b$ の計算を基本に立ち戻って行えば

$$\begin{aligned} x^a \times x^b &= (\overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a\ \text{個}}) \times (\overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{b\ \text{個}}) \\ &= \overbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}^{(a+b)\ \text{個}} \\ &= x^{(a+b)} \end{aligned}$$

[1]「5 の 3 乗」や「$x$ 3 乗」と読みます。

という考えで計算ができます。よって、指数を用いて表現された数の積においては、

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

のように、指数の和をもって代用してよいことが分かります。

ここで、新たな約束ごとの誕生です。

**底（てい）**を同じくする数の積は、指数を足して求める

となります。底とは、$x^a$ における $x$ にあたる数のことです。今後は計算の基本に立ち戻ることなく、この約束を使うことにします。

## 商の指数法則

まず、指数を用いた数の積を見てきました。積を考えたら次は商を考える番です。$a > b$ であるとき、$x^a \div x^b$ を考えます。このときは

$$\begin{aligned} x^a \div x^b &= \frac{\overbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}^{a\text{ 個}}}{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{b\text{ 個}}} \\ &= \overbrace{x \times \cdots \times x}^{(a-b)\text{ 個}} \\ &= x^{a-b} \end{aligned}$$

という考えで計算ができます。$a > b$ の条件を付けたのには理由があります。$a < b$ では、$a - b$ が負の数となって、指数に自然数を使う暗黙の了解からはずれてしまうからです。

しかしながら $a < b$ であるとき、$x^a \div x^b$ は

$$\begin{aligned} x^a \div x^b &= \frac{\overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a\text{ 個}}}{\underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{b\text{ 個}}} \\ &= \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{(b-a)\text{ 個}}} \\ &= \frac{1}{x^{b-a}} \end{aligned}$$

という考えで計算できるので、問題はありません。

また、$a = b$ の場合も考えておく必要があります。と言っても、$a = b$ なら $x^a \div x^b$ は同じ数どうしのわり算ですから、結果は 1 となります。

以上のことから

$$x^a \div x^b = \begin{cases} x^{a-b} & (a > b \text{ のとき}) \\ 1 & (a = b \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{x^{b-a}} & (a < b \text{ のとき}) \end{cases}$$

とまとめることができます。すると、これらの関係式も新たな約束ごととして使えるようになります。数学では、こんな風に正しいことが導かれると、どんどん約束ごととして使い回します。そうこうしているうちに、あれ？どうしてこうなるんだっけ？となることもあります。約束ごとを便利に使っているうちに、それを導いた手順を忘れてしまうからでしょう。型通りに暗記するだけでなく、公式の背景も記憶に留めるようにしたいものですね。

## 積の規則を拡張する

ここで、ちょっと具体的な計算をしてみましょう。$x^{10} \div x^{15}$ は

$$x^{10} \div x^{15} \quad \Rightarrow \quad (10 < 15 \text{ なので}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^{15-10}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^5}$$

と計算を進めることができます。ところで、もしここでうっかり $10 < 15$ であることを見落として、機械的に

$$x^{10} \div x^{15} \quad \Rightarrow \quad x^{10-15} \quad \Rightarrow \quad x^{-5}$$

とやってしまったら、どうなるのでしょう。

指数の記述の約束によれば、$x^{-5}$ は $x$ を $-5$ 個かけ合わせることを意味します。けれど $-5$ 個かけ合わせることはできないので、指数に負の数を使うことはありませんでした。しかし、慎重に計算した結果の $\dfrac{1}{x^5}$ と、機械的に計算した結果の $x^{-5}$ はいずれも $x^{10} \div x^{15}$ が出どころですよね。それなら、いままで $x^{-5}$ のような書き方がなかったことを幸いに、$x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}$ と決めてしまうのが手かもしれません。実際、$n$ を自然数としたとき

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

と定義しています。この定義の仕方が、いままでの計算規則に不都合を生じさせることはありません。だからこそ可能な約束と言えるでしょう。

*** *** **問　題** *** ***

**1.** $2.7183 \times 10^{24} + 1.618 \times 10^{23} - 4.01 \times 10^{22}$ を上手に計算してください。

**2.** $3^2,\ -3^2,\ (-3)^2,\ 3^{-2},\ (-3)^{-2}$ の違いをきちんと区別し、それぞれの値を求めてください。

**3.** $2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32$ は 2 の何乗ですか。

**4.** $x > 0,\ n > 0$ のとき $x^{-n}$ を考えます。$-$ があるにも関わらず $x^{-n}$ が負の数にならないことを説明してください。

** ** ** ** **

## ◆ $0^0$ とは？ ◆

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$（$n$ は 1 以上の自然数）と定義したことで

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

といった計算が成り立ちます。$n$ は自然数を想定しましたが、底 $x$ は実数でした。ですから

$$(-\sqrt{2})^{-3} = \frac{1}{(-\sqrt{2})^3} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} \approx -0.3536$$

もきちんとした値になります。当たり前といえば当たり前です。

ところで $x^n \div x^n = 1$ ですが、指数の約束を適用すれば、それは

$$x^n \div x^n = x^{n-n} = x^0$$

でもあります。指数に負の数が使われたら、それは逆数を表すことだと定義したように、$x^0 = 1$ であると定義すれば問題はないと思われます。$x$ の 0 乗などと言うと、数 $x$ を 0 個かけ合わせるような気がして、答が 0 になるような感じがします。しかし、0 個のかけ合わせという行為自体、すでに常識の範囲を超えていますから、指数の規則から得られた結果を尊重して、$x$ の 0 乗は必ず 1 であると考えましょう。すなわち $5^0 = 1$、$(-\sqrt{2})^0 = 1$ 等々、どんな数も 0 乗すると必ず 1 になるのです。

でも、ひとつだけ落とし穴がありました。$x = 0$ の場合— $0^0$ になるとき—がそれです。

$0^0$ が出る背景に目を向けます。まず指数が 0 になる場合は、同じ指数どうしをひいた場合ですから、$0^0 = 0^{n-n}$ とみることができます。すると、指数における計算の約束から

$$0^0 \quad \Rightarrow \quad 0^{n-n} \quad \Rightarrow \quad 0^n \div 0^n$$

ですが、$0^n \div 0^n$ は結局 $0 \div 0$ と同じことです。数学では 0 でわることはできませんから、$0^0$ は計算できないことになります。したがって、$x^0$ の値は $x \neq 0$ の場合に限って $x^0 = 1$ と定義できるものなのです。$x = 0$ のときの $x^0$ は計算できません。言うなれば、それは「値なし」です。

ただ、$0^0$ を

$$0.1^{0.1}, 0.01^{0.01}, 0.001^{0.001}, 0.0001^{0.0001}, \ldots$$

が行き着く先の値ととらえれば、$0^0 \to 1$ と考えるのは不自然なことではありません。その前に 0.1 乗ってどう計算するの？という点を解決しておく必要がありますが、表計算ソフトなどで計算すれば 1 に行き着く様子が分かると思います。