平均変化率の先 –2–

変動を考える

平均変化率の考えは、関数の変化を巨視的に見ることができる強力なものです。しかし一方で、一定の区間だけを対象にしているので、関数の連続的な変化を捉えることには不向きかも知れません。そこで、平均変化率を計算する視点を、ほんの少し修正することにします。私たちは平均変化率を考えるとき、区間 $[a,\ b]$ を考え

$$平均変化率 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

としてきました。

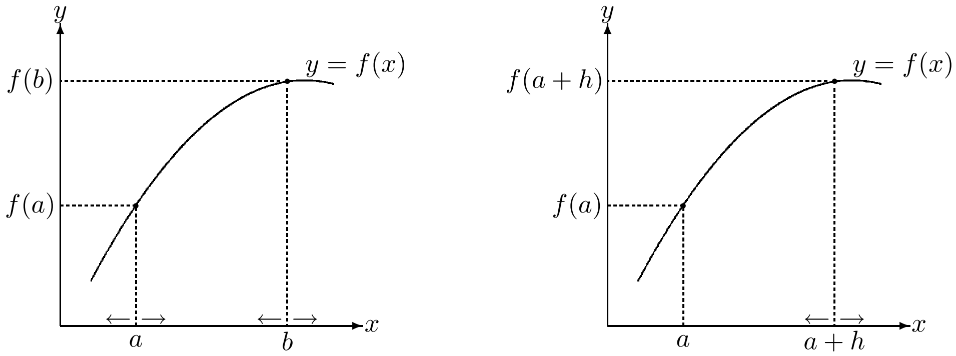
それを、平均変化率を求める区間を端点 $x = a$ と端点 $x = b$ の間と見るのではなく、端点 $x = a$ から h だけ進んだところ、すなわち端点 $x = a$ と端点 $x = a + h$ の間と見るのです。すなわち、区間 $[a,\ a + h]$ を考えようというのです。これは、本質的に同じことを言っているように思えます。一方の端点 $x = b$ が $x = a + h$ に変わっただけですからね。しかし、この視点の変化によって平均変化率は

$$\begin{aligned} 平均変化率 &= \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} \\ &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

と見直すことになります。文字の扱いが変わっただけの式にしか見えませんね。

ところが実際は、これだけの違いながら大きな発想の転換があるのです。区間を $[a,\ b]$ で見た場合は、いずれの端点も固定された感じを持ちます。しかし、区間を $[a,\ a + h]$ で見た場合は、端点 a は固定されるものの、もう一方の端点 $a + h$ は h の量によって変動するものと見ることができます。静的な区間を動的な区間にできたのです。

動的な区間にしたければ、区間 $[a,\ b]$ の両端とも可変であると考えればよいではないか、と思うかも知れません。しかし、区間の両端とも可変と考えたのでは、かえって不安定になって収拾がつきません。一方を固定して他方を可変とするほうが、関数の変化をダイナミックに捉えられるのです。



平均変化率の忠実さ

これまでに私たちは、平均変化率の捉え方として 2 通りの計算方法を知ることとなりました。

$$\text{平均変化率} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

と

$$\text{平均変化率} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

です。計算上はどちらも同じ値を求めています。どちらも計算の性質上、場合によっては平均変化率が実際の関数の変化を忠実に表さないこともあります。それは、計算区間が広いほど顕著になりがちです。このことを逆の立場で見れば、計算区間が狭いほど実際の関数の変化を忠実に表しやすいことにつながります。もし、このような考えにもとづけば、2 つの式は扱いが大きく異なるのです。

(1) では、区間が狭いことは $a \approx b$ で表現されるでしょう。一方、(2) では $h \approx 0$ で表現されるはずです。少しの違いのようですが、ここには大きな差があります。$a \approx b$ というと、a と b の値が近いことは分かっても、実際の a, b は任意の区間を浮遊するように漂ってしまいます。それに対して、$h \approx 0$ といえば、a の位置に関わらず h の幅は a にぴったり寄り添っています。

私たちにとって扱いやすいのは、後者のほうでしょう。

極限の状態

いま私たちは、平均変化率の変化の幅 h を用いて関数の変化を直線的に捉えられるようになっています。h は可変ですから、その幅の取り方によっては、関数の増減を見誤る可能性があります。長期的に増加している関数であっても、短期的には減少していることはあるからです。そういうことなら、あまり h の幅を大きく取るのは得策ではないでしょう。h の幅が小さいほど、平均変化率は関数の変化に忠実だと言えるでしょう。

では、h の幅をどのくらい小さくするのがよいのでしょうか。結論を言えば、限りなく 0 に近い大きさにすることです。なぜなら、それがもっとも元の関数の変化に近いと考えられるからです。だからといって、h の幅をちょうど 0 にするわけにはいきません。$h = 0$ では、両端の点を取ることができないからです。

すると今度は、限りなく 0 に近い状態とは、どのような状態を指すかが問題となります。単純な考えでは

$$0.000000\cdots \tag{3}$$

なる数を想像するでしょう。しかし、こう考えると少々まずいことが生じます。それは、(3) は 0 ではないのですから、永遠に 0 が並んでいるわけではありません。必ずどこかで 0 以外の数が出現するはずです。でも、どこかで 0 でない数が現れたとしても、そこから先にも何らかの数が永遠に並んでいるはずです。

$$0.000000\cdots\alpha_1\cdots\alpha_2\cdots \tag{4}$$

そのように考えた数は結局、永遠に続く数字の列の途中に 0 でない数を持つことになって、とても限りなく 0 に近いなどとは言えなくなってしまいそうですね。

"限りなく近い" 状態は**極限**と呼ばれ、一筋縄ではいかない考えを必要とします。0 に近い状態を数式などを用いて表すとなると、それはそれで結構大変なことなのです。そこでいまは、限りなく 0 に近い状態を (4) のような固定的な考えをせず、もう少し動的な考えで捉えておきましょう。そもそも、0 に近い状態になるには、少なくとも 0 に近付く努力をしないとならないわけですから、0 に近付く感覚を見直しておくことにします。

たとえば、私たちが「駅へ近付く」などと表現するときは、歩いていても自転車に乗っていても、一歩一歩前進するものです。そこで、数学の世界でも 0 に近付く様子を、一歩一歩進む**数列**で考えることにするのです。例として

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ \frac{1}{100000},\ \frac{1}{1000000},\ \cdots$$

は、0 に近付く—そして決して 0 にはならない—数列です。この数列を目で追っていくと、小数点以下に 0 がひとつずつ増えていく数が想像できるでしょう。

もしこのような数列で、0 への近付き方が弱いと感じれば次のような数列を考えたらどうでしょう。

$$\frac{1}{10!},\ \frac{1}{100!},\ \frac{1}{1000!},\ \frac{1}{10000!},\ \frac{1}{100000!},\ \frac{1}{1000000!},\ \cdots \tag{5}$$

分母に記号 ! が付いただけのものですが、これはとんでもない記号なのです。一般に $n!$ と書いて "n の階乗" と読み、$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$ に値します。したがって

$$\frac{1}{10!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10} = \frac{1}{3628800}$$

です。こうなると、次の $\dfrac{1}{100!}$ は

$$\frac{1}{100!}=\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\cdots\cdots\times 100}$$

を意味するので、もうどのくらいの数になるか想像もできません。このことから (5) は、あっという間に 0 に近付く数列であることが理解できることと思います。しかし決して 0 ではないのです。こういう状況を $h\to 0$ で表します。

平均変化率の極限

さて、$h\to 0$ の状態が想像できるようになったところで、平均変化率へ戻りましょう。たとえば $y=x^2$ において、x の区間 $[a,\ a+h]$ における平均変化率を計算してみます。

$$\begin{aligned}\text{平均変化率} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2}{h}\\ &= 2a+h\ .\end{aligned}$$

ここで $h\to 0$ の極限を考えれば、平均変化率が $2a$ であることが分かるのですが、これは何を表しているのでしょうか[1]。$h\to 0$ ですから、区間はほとんど $x=a$ の位置にあるわずかの隙間と考えてください。わずかの隙間であっても、平均変化率は区間に引いた直線の傾きを表しています。それが $2a$ だというのです。実は、その際にできる直線の傾きというのは、$x=a$ における**接線**の傾きになっています。つまり、平均変化率の極限は、ある点における接線の傾きを表す値でもあったのです。

*** *** **問　題** *** ***

1. 直線 $y=mx+n$ —傾き m、y 切片 n の直線—について、区間 $[a,\ a+h]$ における平均変化率を求めてください。そして、平均変化率が h の幅によらないことを示してください。

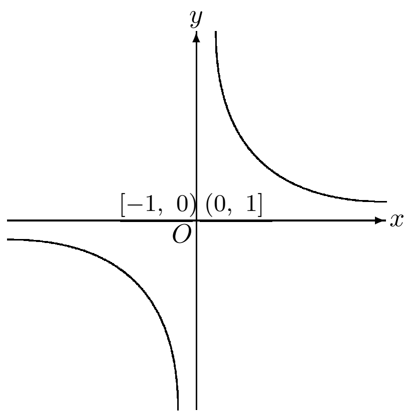
2. $y=\dfrac{1}{x}$ について、区間 $[1,\ 1+h]$ における平均変化率を求めてください。そして、$h\to 0$ の極限が $y=\dfrac{1}{x}$ の $x=1$ における接線の傾きです。それはいくつでしょう。

** ** ** ** **

[1] $h\to 0$ とは、基本的に $h=0$ を代入することと大差ありません。

◆ 極限の微妙な感覚 ◆

区間 $a \leqq x \leqq b$ を、x の区間 $[a,\ b]$ と表現することはすでに紹介しました。一般の感覚ではこれで十分でも、こと数学に関しては不十分となることは多々あります。たとえば $y = \dfrac{1}{x}$ で x の区間 $[-1,\ 1]$ を考えることは不自然なことではありません。ところが、分母が 0 になるときの値は定義できないので、x の区間 $[-1,\ 1]$ のうち $x = 0$ だけは穴が開いたような状態となります。



$x = 0$ を除外したいとき、区間 $(0,\ 1]$ のように書くことがあります。カッコの形で含む・含まないを区別するわけです。この場合は、$x = 0$ は区間に含まれないが $x = 0.00\cdots051$ みたいな微小値は含まれ、また $x = 1$ は区間に含まれます。なかなか繊細ですね。

ちなみに、両端を含む区間 $[a,\ b]$ は**閉区間**と呼び、両端を含まない区間 $(a,\ b)$ は**開区間**と呼びます。片端だけを含む区間は**半開区間**と呼び $(a,\ b]$ または $[a,\ b)$ で表します。

さて、ここまでの微妙な数の扱いに、どこか数学らしからぬ感じを持った人はいませんか。数学では、数式を中心にきちんきちんと理詰めで考えることが普通ですから、限りなく 0 に近いなどという表現は馴染まないのでしょう。感覚だけで納得できないときは、次のように考えて対処するとよいでしょう。

たとえば ∞ という限りなく大きい状態—すなわち**無限大**—は、比較的想像しやすいかも知れません。どんなに大きな数 H を考えたとしても、たった $H+1$ とするだけでさらに大きな数を考えることができます。この式から、∞ に限りがないことが分かります。逆に $h \to 0$ という状態は少し難しいでしょう。限りなく 0 に近い数 ϵ を考えたとき、うかつに引き算をすると負の値になってしまうのですから。しかし、この場合は $\dfrac{\epsilon}{2}$ とするだけでさらに小さい、しかも負にならない数を考えられます。こういう扱いならまぎれが生じないのです。