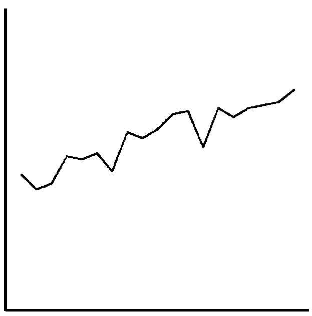
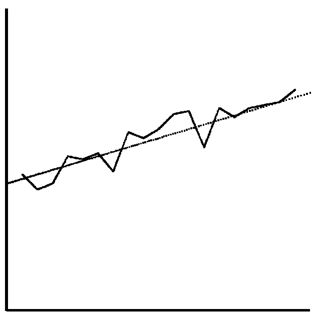
変化の割合の先 –1–

変化の割合

皆さんは、$y = ax$ や $y = ax^2$ で表される関係式はよく知っているでしょう。これらの関係は、バネの伸びや落下運動に当てはまるので、実際に実験をしなくとも机上で様々なシミュレーションができ重宝します。それに、なんと言っても式が簡単なので、取扱いに苦労することはありません。世の中には、このような単純な関係で近似できることは数多くあるのですが、また、複雑きわまりない事象も数多く存在してます。

複雑なものでは、気温の変化や株価などがあげられます。これらは時事刻々と上下動を繰り返し、つかみどころのない変化をしています。しかし、まったくとらえどころがないわけでもありません。たとえば、春先であれば、気温の変化は上昇傾向にあることが分かるからです。





上昇傾向の程度を知る一番簡単な方法は、直線を引いてみることです。細かい変化に目をつぶれば、気温の上昇がどの程度であるか表現できています。このように、多少の誤差は気にしないで、平均的な**変化の割合**を調べることはしばしば有効なものです。変化の割合とは、x の 1 あたりの変化に対して y がどれだけ変化したかをはかるもので、

$$変化の割合 = \frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}$$

を計算すると求められます。変化自体が直線的であれば変化の割合は常に一定です。そのため直線

に限って、これを直線の**傾き**と呼んでいるのです。しかし本来の変化の割合は、関数のどのような変化に対しても直線で近似することを意味するのです。

ところで、上下動を繰り返しているグラフに適切な直線を当てはめるのは意外に難しいものです。普通は「大体こんなとこだろう」という具合に、えいっと引くでしょう。実は、先の気温のグラフに重ねて引いた直線は、この方法で引いたものですから、最適な直線になっているとは限りません。

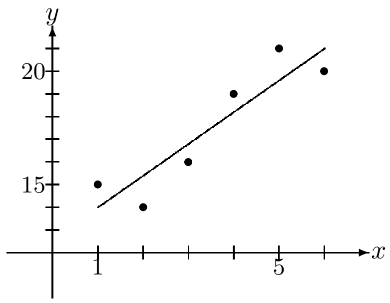
平均的という考え方

変化の割合を具体例で見ていきましょう。

x	1		2		3		4		5		6
y	15		14		16		19		21		20
差		-1		$+2$		$+3$		$+2$		-1	

表は x の値に対する y の値の変化が書いてあります。まあ、ある月の気温変化とでも見てください。基本的に上昇基調にあります。平均的にどの程度の上昇であったかを知るには、y の差をとって平均を求めてみることです。$\dfrac{-1+2+3+2-1}{5}=+1$ より、平均的に 1 ずつの増加があったことが分かります。しかしながら、これは変化の割合を求めたのではありません。変化の割合とは $\dfrac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}$ ですから、表にある差がまさにそれです。差は、x の 1 の変化に対する y の変化量なのですから。したがってそれらを平均した値は、変化の割合の平均とでも言うべき値になっているのです。

もし、x の 1 から 6 までに対する変化の割合—すなわちもう少し長期に渡る変化—を求めるなら、適切な直線を引く必要があります。そのような直線は**回帰直線**と呼ばれます。ここでは、回帰直線を求めることが主題ではないので、結果だけをグラフ化しておきます。直線の傾きと y 切片は**最小 2 乗法**で計算したのですが、傾きは $+1.4$ で、さきほどの平均 1 とは違いが生じています。



このように、飛び飛びの値に対して適切な直線をあてがって、その直線の傾きから大体の上昇傾向を読み取るのは有効な方法でしょう。もちろん、飛び飛びでない連続な関数に対しても、適切な直線をあてがって変化の割合を求めることはできるので、大筋の変化を調べるのに変化の割合は適していると言えます。しかし、このような方法をとった場合、一番問題になるのが “適切な” 直線を引くことなのです。たしかに、さきほどの具体例のように、回帰直線を求めることは可能です。しかし、基本的に回帰直線は飛び飛びの値から直線関係を推測することが目的なので、あらかじめ関係式が分かっているような関数に、わざわざ推測のための回帰直線を求める必要はないのです。

平均変化率

変化の割合は、関数の平均的な変化量を直線の傾きとして考るので、直線の引き方に難しいものがありました。そこで、平均的な変化量の捉え方を、グラフに対し最適化するのではなく、グラフの両端だけで考えることにします。つまり、途中の細かい変化は考慮しないということです。こうすれば、直線の引き方は**一意的に**決まりますし、計算も簡略化できます。生活常識の範囲でなら、どちらも大差ない結果になると思われます。グラフの両端のみで考える平均的な変化量は、変化の割合と区別する意味でも**平均変化率**と呼ぶことにします。

さきほどの具体例で x の 1 から 6 までに対する平均変化率を考えれば、y の変化は 15 から 20 なので、

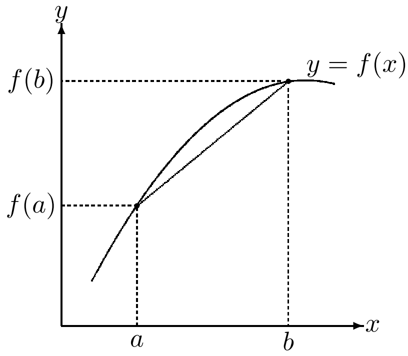
$$\text{平均変化率} = \frac{20-15}{6-1} = 1$$

ということになります。変化の割合の平均と一致しましたね。

平均変化率はグラフの両端の値しか利用しないので、途中の値に影響されません。そのため、途中のデータがたくさんあっても計算量が増えることはありません。そればかりか、途中の値をとる必要がないので、連続的に値をとる関数であっても、何も気にせず計算ができる利点があります。しかし、途中を考慮しないのでは、関数の実体を表さないのではないかとの不安もあります。とりあえず不安は横に置いて、平均変化率をきちんとした式で表すことにしましょう。

いま、$y =$ (何がし) で表されている式があったとします。(何がし) の部分は、$3x+1$ とか $-x^2$ のように、x を**変数**とする関係式とします。(何がし) では余りにも漠然としているので、これからは、$y = f(x)$ と書いて x を使った関数であることを示すものとします[1]。これはなかなか便利な記述法なのです。たとえば $y = 3x+1$ では $f(x) = 3x+1$ ですが、かりに $x = 2$ を代入した値を求めるとしたら、ただ $f(2)$ と書くだけで済むのですから。もちろん、実際に計算するなら $f(2) = 3 \times 2 + 1 = 7$ です。

[1] $f(x)$ は “function of x”（x の関数）ということ。



さて、関数 $y = f(x)$ において、ある**区間**（$a \leqq x \leqq b$）— x の区間 $[a,\ b]$ と書きます—の平均変化率を考えます。平均変化率では途中の変化は考えないので、問題となるところは両端の $x = a$ と $x = b$ での値だけです。このときの y の値は、$y = f(x)$ の式に $x = a$ なり $x = b$ なりを代入した値ですから、$f(a)$ と $f(b)$ になります。そうすると、x が $b - a$ だけ変化している間に y は $f(b) - f(a)$ だけ変化することになるので、

$$\text{平均変化率} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

と考えるとよいでしょう。式はいかめしいかもしれませんが、計算自体は変化の割合と同じなのです。

***　***　**問　題**　***　***

1. $y = x^3$ について、x の区間 $[0,\ 2]$ における平均変化率を求めてください。また、x の区間 $[-2,\ 2]$ における平均変化率も求めてください。

2. $y = x^2$ は、x の区間 $[a,\ b]$ に対する平均変化率が $a + b$ であることを示してください。

3. $y = x^2$ について、x のそれぞれの区間 $[0,\ 1]$, $[1,\ 2]$, $[2,\ 3]$, $[3,\ 4]$ に対する変化の割合を求めてください。次に、それらの変化の割合の平均と区間 $[0,\ 4]$ に対する平均変化率とを比べてください。

**　**　**　**　**

◆ 変化の割合の平均と平均変化率 ◆

本文中で、変化の割合の平均が平均変化率と一致した箇所があります。覚えていますか。これは、たまたま一致したわけではなく、変化の割合の平均と平均変化率は同じことを意味しているからです。簡単な例で、そのことを示したいと思います。

x	a		$\cdot$		$\cdot$		b
$f(x)$	k		$k+d_1$		$k+d_1+d_2$		$k+d_1+d_2+d_3$
差		d_1		d_2		d_3	

表はちょっとごちゃごちゃしてますが、x の区間 $[a,\ b]$ に対する $f(x)$ の値とその差です。$[a,\ b]$ 間の $\cdot$ は、1 ずつ増加しているものと考えてください。したがって、表の $[a,\ b]$ 間は 3 ということになります。また、ここでは差を中心に見ているので、$f(x)$ の値は差の分ずつ増えていくように書いてあります。

まず各々の差が変化の割合を表すので、

$$\text{変化の割合の平均} = \frac{d_1+d_2+d_3}{3}$$

となります。

次に平均変化率は、

$$\begin{aligned}\text{平均変化率} &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= \frac{(k+d_1+d_2+d_3)-k}{3} \\ &= \frac{d_1+d_2+d_3}{3}\end{aligned}$$

となって、同じ結果を得ます。このことは、区間の幅が 3 でなくても成り立ちます。

関数の両端の値だけで計算することばかりに目を向けると、何か本来の関数の変化からかけ離れた値を求めているように感じた平均変化率も、実際は細かい区間の変化の割合の平均を求めていたのです。だから、見た目はまったく別の変化をする関数でも、変化量を取り出せば同じであることが多々あります。大儲けと大損をくり返した挙げ句わずかの利益を手にすることと、低金利を承知で預けた末に手にするわずかの利益が同じであることが、平均変化率を端的に表しているのではないでしょうか。