連立方程式の芯 –2–

行列

ここでの話題の最初に目にした連立方程式に再び登場してもらいます。

$$\begin{cases} 6x+y &= -3 \quad \cdots(1) \\ 3x-5y &= 4 \quad \cdots(2) \end{cases}$$

せっかくなので、掃き出し法を利用して解くことにします。

元の連立方程式から係数だけ抽出する。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

1 行目を 6 で割る。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 3 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

2 行目に 1 行目の (-3) 倍を加える。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

2 行目を $-\dfrac{2}{11}$ 倍する。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

1 行目に 2 行目の $-\dfrac{1}{6}$ 倍を加える。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

これで $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=-1$ の解を求めることができました。このように、連立方程式から抽出した係数を縦横に並べて記述したものを**行列**と呼びます。連立方程式を解くことは、行列にある操作をほどこすことを意味するのです。

行列の積の定義

連立方程式を解く際に使った行列のうち、特に x, y の係数を表していた $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ に注目しましょう。連立方程式の解を求めるには、この行列が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ になればよいわけです。そうすれば自然と右側の値が正しい解に変化するからです。

ここで、私たちが 1 次方程式を解く方法を思い出してもらいましょう。たとえば $4x = 3$ を解くには、x の係数を 1 にするべく、両辺に $\dfrac{1}{4}$ をかけるのはお馴染みですね。その結果、右辺の 3 にも $\dfrac{1}{4}$ がかけられて、解である $x = \dfrac{3}{4}$ が求められます。このような考えが行列の計算にも応用できれば便利ですね。

しかしそれ以前に、行列に対してかけ算をすることが問題になります。かけ算はどう定義すればよいか、です。まず、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の形の行列は「2 行 2 列の行列」と呼びます。英文を読むように a, b, c, d の順に文字を追えば、2 行になっているからです。一方で和文を読むように b, d, a, c の順に文字を追えば、2 列にもなっています。だから 2 行 2 列なのです。この規則から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であれば、2 行 1 列の行列であることが理解できますね。

さて、このような行列にかけ算をどう定義するかといえば、実は巧妙な定義がされています。たとえば (2 行 2 列) × (2 行 1 列) であれば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

と定義します。これは不思議な定義の仕方に見えますが、連立方程式に関連づければ決して不自然な定義というわけではありません。なぜなら、定義に従えば

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+y \\ 3x-5y \end{pmatrix}$$

となるので、最初の連立方程式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と書くことができるからです。

もうひとつ (2 行 2 列) × (2 行 2 列) の行列の積を定義しておきます。これは

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bu \\ cx+dy & cz+du \end{pmatrix}$$

と定義します。このことは、(2 行 2 列) × (2 行 1 列) の行列の積において

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+bu \\ cz+du \end{pmatrix}$$

をまとめて書いたものと考えれば納得できるのではないでしょうか。

行列の積の不思議

ようやく行列の積を定義したわけですが、行列の積には少し困った性質があります。$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の積を、かける順を変えてかけてみましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

以上の計算から分かるように、かけ算の順を変えると違う結果になってしまいます。これは大変困った性質ですが、積の定義から仕方のないことです。私たちは、行列の積では、右側からかけるか左側からかけるかを常に念頭におく必要があるということです。しかし、ここから先の話では簡単のため、行列は左側からかけることにします。連立方程式を解く上ではこれで十分だからです。

話が込み入ってきましたので整理しておきます。私たちの目的は、行列 $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ の左から何らかの行列をかけて $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にすることです。これは、連立方程式の左辺を $1x$ と $1y$ の形にすることを意味します。そのとき、行列 $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の左にも同じ行列がかけてあるわけですから、その結果が連立方程式の解になります。

逆行列

方程式 $4x = 3$ を解くということは、x の係数を 1 にすることに他なりません。これには、いわゆる**逆数**をかけることになります。同じように連立方程式を解くということは、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の左側の行列を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にすることでもあります。行列の場合、それは**逆行列**なるものをかけることに等しいのです。

ふつう、数 a の逆数は分数表記にして $\dfrac{1}{a}$ とするだけですが、行列の逆数にあたる逆行列はそう簡単ではありません。それでも一般に逆行列を求める手順はありますから、それを示します。

もし、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の左側からかけ算をしたとき、その結果が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ があるとします。すなわち

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ということです。これは行列の積の定義より

$$\begin{cases} pa+qc &= 1 \\ pb+qd &= 0 \\ ra+sc &= 0 \\ rb+sd &= 1 \end{cases}$$

の解を求めること— p, q, r, s を a, b, c, d 用いて表すこと—と同じです。連立方程式の計算は複雑そうに見えます。しかし、1, 2 行目の連立方程式から p, q を求め、3, 4 行目の連立方程式から r, s を求めるだけなので、計算は案外容易にできます。結果を示せば $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

と求められるのです。

これで、最初の連立方程式を解く準備が整いました。最初の連立方程式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ですから、両辺の左から $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ の逆行列—すなわち $\begin{pmatrix} \frac{5}{33} & \frac{1}{33} \\ -\frac{3}{33} & \frac{6}{33} \end{pmatrix}$ —をかけることで

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{33} & \frac{1}{33} \\ -\frac{3}{33} & \frac{6}{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{33} & \frac{1}{33} \\ -\frac{3}{33} & \frac{6}{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となりますから

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

のように、x, y の解が簡単に求められます。

*** *** 問　題 *** ***

1. $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを確認してください。また、かける順番を入れ替えた $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ では違う結果になるでしょうか。

2. 逆行列を利用して次の連立方程式を解いてください。

$$\begin{cases} 7x-2y &= 4 \\ 3x-y &= 9 \end{cases}$$

3. 次の連立方程式は、逆行列を利用して解くことができません。なぜでしょうか。

$$\begin{cases} 9x - 3y &= 5 \\ 3x - y &= 2 \end{cases}$$

** ** ** ** **

◆ 行列の和と積について ◆

行列の積はかける順を入れ変えると必ずしも同じ答にならないことから、左側からの積と右側からの積を区別して考えなければなりませんでした。実はそのこと以前に、行列は積が定義できるものとできないものとがあることを知っておかなければなりません。さらに言えば、行列の和差も定義してあってしかるべきでしょう。

行列とは、数を縦横に矩形（くけい）に並べたものですから、100 行や 100 列におよぶ行列を考えてもかまわないはずです。それなら、(100 行 100 列) の行列と (10 行 10 列) の行列に対して、和や積が定義できるものでしょうか。もちろん、定義というものは「これこれ、こういうものだ」と決めることを指しますから、絶対定義不能というわけではありません。しかし、常識的な使える定義をしようとするなら、このような場合は定義できません。

和と差についての常識的な定義は、まったく同型の行列に限り足したり引いたりできるというものです。つまり、(3 行 4 列) + (3 行 4 列) や (6 行 1 列) − (6 行 1 列) のような行列の計算は定義可能です。同型でないと、互いに足し合う（引き合う）相手がないことになるので、自然な定義だと思います。具体的に (2 行 2 列) + (2 行 2 列) の場合

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

です。

では、かけ算はどうでしょう。それは、積の定義の一部である

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$$

をかけ算の基本定義としています。つまり、行列の要素を互いにかけてそれらの和をとることが、行列における積なのです。この計算が不備なく行われるためには、左の行列の列数と右の行列の行数が一致している必要があります。もし一致していないと、かけ合う相手がない場合ができてしまうからです。

かくして、行列の積を定義できる場合は (l 行 m 列) × (m 列 n 列) のタイプのかけ算だけということになります。ちなみに、その結果答となる行列は (l 行 n 列) の行列です。