連立方程式の芯 –1–

連立方程式

連立方程式というと、はじめに思い浮かぶのは

$$\begin{cases} 6x+y &= -3 \quad \cdots(1) \\ 3x-5y &= 4 \quad \cdots(2) \end{cases}$$

のようなものでしょう。この連立方程式を解くひとつの方法は、(1) を $y=-6x-3$ として (2) に代入することです。すると、x だけの方程式になりますから簡単に解けます。

しかし、連立方程式は代入をしない別の方法でも解くことができます。(1) の両辺を 5 倍して (2) の式と合わせると、$33x=-11$ から $x=-\dfrac{1}{3}$ を求めることができ、それから $y=-1$ の解も即座に得ることができます。どちらが優れているということはないので、適切な方法で解くのがよいでしょう。

3 元連立 1 次方程式

では、もう少し手の込んだ連立方程式を相手にしましょう。

$$\begin{cases} 2x-3y+z &= 3 \quad \cdots(1) \\ 3x-y+z &= -2 \quad \cdots(2) \\ -x+2y-z &= -2 \quad \cdots(3) \end{cases}$$

一般に、方程式に使われる未知数—ここでは x, y, z —を**元**と呼びます。また、それぞれの文字の次数—いわゆる 2 乗とか 3 乗とかいうこと—のうちいちばん大きな次数を、その方程式の**次数**と決めています。したがって、ここに登場した方程式は「3 元連立 1 次方程式」です。ちょっと長ったらしい言い方ですね。

さて、1 次方程式は元の数が多いときは、代入をするより適当に定数倍してから加減するほうが解きやすいものです。具体的に、この連立方程式を解く手順を示します。まず、(3) を基準に—特に (3) の x を基準に—据えることにします。それから、残りの式に (3) の定数倍を加えて x を消

去することを考えます。この場合、$(1)+(3)\times 2$ と $(2)+(3)\times 3$ を計算すれば目的を達することができます。すると

$$\begin{cases} y-z &= -1 \\ 5y-2z &= -8 \end{cases}$$

となりますから、この先はお馴染みの連立方程式を解くだけです。その結果、$y=-2,\ z=-1$ が分かるので、後はたとえば (3) より $x=-1$ が分かります。

連立方程式がもう少し複雑になって、$x,\ y,\ z,\ u$ を元とする 4 元連立 1 次方程式になっても、解き方の基本は同じです。あるひとつの式のある元—たとえば x —を基準にして、残りの式の x を消去することを考えます。それがうまくゆけば、そこには $y,\ z,\ u$ を元とする式が 3 つ残っているはずです。これは 3 元 1 次の連立方程式ですから、同様に計算を続ければ次は 2 つの元を持つ式が 2 つ残って、最後に 1 つの元を持つ式が 1 つになってハッピーエンドとなります。要するに、ひとつの段階を経るたびに元と式の数がひとつずつ減るから、解を特定できるのです。

ところでこの方法は、着実に正解に近付くのはよいけれど、先へ進むたびに新たな連立方程式が生まれる煩わしさがあります。そこで、これを少し改良した形で解く方法を示したいと思います。

式をかぶせよう

もう一度、さっきの連立方程式に登場してもらいます。

$$\begin{cases} 2x-3y+z &= 3 & \cdots(1) \\ 3x-y+z &= -2 & \cdots(2) \\ -x+2y-z &= -2 & \cdots(3) \end{cases}$$

(3) の x を基準に始めることは同じです。さらに、$(1)+(3)\times 2$ と $(2)+(3)\times 3$ を計算することも変わりません。では、何を改良するというのでしょう。それは、これらの計算結果を別の場所に記述しないで、そのまま (1), (2) の行にかぶせて書くのです。つまり、この計算の後、はじめの状態が

$$\begin{cases} y-z &= -1 & \cdots(1)' \\ 5y-2z &= -8 & \cdots(2)' \\ -x+2y-z &= -2 & \cdots(3)' \end{cases}$$

へと変化するということです。(3) と $(3)'$ は同じですが、次の状態に使われる式という意味を込めて $'$ を付けました。以下、同様に記述します。

さあ、先を急ぎましょう。今度は $(1)'$ の y を基準に考えます。その上で、$(1)'\times(-5)$ と $(1)'\times(-2)$

をそれぞれ $(2)'$ と $(3)'$ にかぶせて記述します。すると、次は

$$\begin{cases} y-z &= -1 & \cdots(1)'' \\ 3z &= -3 & \cdots(2)'' \\ -x+z &= 0 & \cdots(3)'' \end{cases}$$

へと変化します。

ここで、$(2)''$ は z だけの式ですから、両辺を 3 で割って

$$\begin{cases} y-z &= -1 & \cdots(1)''' \\ z &= -1 & \cdots(2)''' \\ -x+z &= 0 & \cdots(3)''' \end{cases}$$

としておきます。最後に、$(2)'''$ を基準にして $(2)'''$ と $(2)'''\times(-1)$ をそれぞれ $(1)'''$ と $(3)'''$ にかぶせて記述します。

$$\begin{cases} y &= -2 \\ z &= -1 \\ -x &= 1 \end{cases}$$

$-x=1$ となってますが、これは $x=-1$ のことですから連立方程式が解けたことになります。

係数操作

ここまでの話で何か気付くことがあるでしょうか。と言っても、当たり前すぎて目にとまらないかもしれませんが、連立方程式は結局のところ、係数だけを計算して解を求めているということです。そのことを実感するために、さっきの連立方程式を解いた過程を係数だけ取り出して再現してみます。係数だけでは等式の左辺と右辺が分かりづらいので、等式の代わりに縦線を入れてあります。まずは、流れを追ってみてください。

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -8 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right.$$

実は、この方法は連立 1 次方程式を解くための強力なアルゴリズムなのです。いまは連立方程式を解いた通り再現したために、最終段階がきれいにまとまっていません。そこで、最後にきれいにまとまるように、きちんとしたアルゴリズムを示しましょう。

掃き出し法

一般に、連立方程式は複数の等式を並べて書きますが、書き並べる順に意味があるわけではありません。いちばん下にあった等式を、いちばん上に動かしても本質は変わらないからです。また、等式である以上、両辺を -1 倍してもまったく問題ありません。そこで、こういった性質をうまく利用しながら、さっきの連立方程式を係数だけの計算で解くことにします。

元の連立方程式から係数だけ抽出する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

3 行目を (-1) 倍していちばん上へ移動する（元々の 1, 2 行目はそれぞれ 2, 3 行目に下がっている）。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

2 行目に 1 行目の (-2) 倍を加え、3 行目に 1 行目の (-3) 倍を加える。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -8 \end{array}\right)$$

1 行目に 2 行目の 2 倍を加え、3 行目に 2 行目の (-5) 倍を加える。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

3 行目を 3 で割る。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

1 行めと 2 行目に 3 行目を加える。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

左上から右下にかけて 1 が並んだところで終了です。この 1 は、順に $1x,\ 1y,\ 1z$ を表しているので、それらの解が $x=-1,\ y=-2,\ z=-1$ であることが分かります。このような手順で連立方程式の解を求める方法を**掃き出し法**と呼ぶことがあります。

*** *** **問　題** *** ***

1. 3 元連立 1 次方程式を解くために、3 つの等式が使われていました。もし、3 元連立 1 次方程式を解くために、等式が 2 つしかなかったらどうなるか考えてください。また、等式が 4 つあった場合はどうなるかも考えてください。

2. 次の連立方程式を解いてください。

$$\begin{cases} 5x+2y-10z &= -4 \\ x+2y+2z &= 8 \\ -3x-y+4z &= 1 \end{cases}$$

** ** ** ** **

◆ 連立方程式いろいろ ◆

連立方程式には様々なタイプのものがあります。簡単なものをひとつ紹介しておきましょう。

$$\begin{cases} xy &= -4 \quad \cdots(1) \\ x+y &= -3 \quad \cdots(2) \end{cases}$$

この場合は (2) より $y=-x-3$ を (1) へ代入して解くのが一般的です。すると $x(-x-3)=-4$ は 2 次方程式

$$x^2+3x-4=0$$

ですから、因数分解を利用して $(x+4)(x-1)=0$ より $x=-4,\ 1$ と解くことができます。すると y の解は (2) より $y=1,\ -4$ ですから、結局、連立方程式の解としては

$$(x,\ y)=(-4,\ 1) \quad \text{または} \quad (1,\ -4) \quad (☆)$$

となります。

この例では、掃き出し法のような解き方はありませんが、元の方程式が $x+y$ と xy であることに注目しましょう。$x+y$ と xy は**基本対称式**と呼ばれます。特徴は、x と y を入れ替えても同じ式であるということです。つまり、x と y は同じ立場にあるわけです。

このことを知っていると、$x=-4,\ 1$ の解が出た時点で、これが y の解でもあることが分かります。したがって、(2) に代入することなく (☆) を得ることができるのです。ささやかな工夫は、いろいろなところに潜んでいるものです。